**Universidade de Lisboa**

# Função derivada e a sua relação com a função original, em diferentes representações

Inês Salomé Rodrigues Vasques

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Hélia Margarida Aparício de Oliveira e coorientado pela Professora Doutora Maria Suzana Metello de Nápoles

2015

**Universidade de Lisboa**

# Função derivada e a sua relação com a função original, em diferentes representações

Inês Salomé Rodrigues Vasques

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pela Professora Doutora Hélia Margarida Aparício de Oliveira e coorientado pela Professora Doutora Maria Suzana Metello de Nápoles

2015

*Para a minha Mãe…*

*Este trabalho é o resultado de tudo o que sonhámos!*

# Resumo

Este estudo baseia-se no trabalho desenvolvido com uma turma de 11.º ano, da Escola Secundária com 3.º ciclo de Caneças, na unidade didática “Taxa de Variação e Derivada”, na disciplina de Matemática A, que lecionei no decurso de 12 aulas de 90 minutos. O programa desta disciplina indica que a abordagem das funções reais deve considerar estudos dos diferentes pontos de vista, nomeadamente, o gráfico e algébrico, e desta forma, este estudo incide precisamente nas diferentes representações de funções reais de variável real, em particular no que diz respeito ao uso dessas representações ao estabelecer a relação entre a função derivada e a função original. Assim, o objetivo deste trabalho de cariz investigativo é analisar a compreensão que alunos do 11.º ano revelam da noção de função derivada e a sua relação com a função original, em diferentes representações.

Este estudo assenta numa abordagem qualitativa e os principais métodos e instrumentos de recolha de dados são a observação participante, com utilização de um diário de bordo e a recolha documental das resoluções escritas dos alunos.

A análise dos dados recolhidos evidencia que os alunos desenvolveram a noção de função derivada, conseguindo relacioná-la com a função original nas diferentes representações, principalmente algébrica e gráfica, mas manifestaram também uma tendência para associá-la à aplicação de procedimentos e regras. Por vezes os alunos não consideram a função derivada como uma ferramenta para resolver tarefas com outros contextos, nomeadamente problemas de otimização, revelando as maiores dificuldades no estudo do sinal desta função quando esta está representada algebricamente e na determinação dos extremos da função original. No entanto, os alunos mostraram uma boa capacidade de analisar funções a partir das suas representações gráficas.

**Palavras - chave**: função derivada, representação algébrica, representação gráfica.

# Abstract

This study is based on the work developed with an $11^{th}$ grade class at the Escola Secundária com 3.º Ciclo de Caneças, on the didactic unit “Rate of Change and Derivative”, in the subject of Matemática A that I taught during 12 90-minute lessons . The Mathematics Curriculum for the $11^{th}$ grade mentions that the approach to real functions should include studies from several points of view, namely the graphical and algebraic ones; hence, this study focuses precisely on the different representations of real functions of real variable, particularly in what concerns the use of those representations in establishing the relationship between the derivative function and the original function. Therefore, the goal of this investigative work is to analyze the understanding perceived in $11^{th}$ grade students of the notion of derivative function and its relationship with the original function, in different representations.

This study is built upon a qualitative approach and the main methods and instruments of data collection are participant observation, with resort to a journal and to documental gathering of students’ written answers.

The analysis of the collected data shows that the students have developed the notion of derivative function, managing to relate it with the original function in different representations, algebraic and graphical, but have also manifested a propensity to relate it with procedures and rules. Often the students would not consider the derivative function as a tool to solve problems within different contexts, namely optimization problems, revealing the greatest difficulties in the study of the sign of this function when represented algebraically and when determining the extrema of the original function. On the other hand, the students have shown some skill in the analysis of functions from their graphical representations.

**Keywords:** derivative function, algebraic representation, graphical representation.

# Agradecimentos

O apoio e a colaboração de diversas pessoas foram determinantes para a realização deste trabalho e por isso gostaria de expressar a minha gratidão a todos aqueles que estiveram presentes ao longo deste percurso.

Em primeiro lugar as minhas palavras têm de ir para o meu avô. Sem ti, sem o teu apoio e incentivo constante ao longo de todos estes anos não seria possível concretizar este sonho. Sempre te considerei um homem à frente do teu tempo e por todos os ensinamentos que me ofereceste e por teres sido o meu mentor enquanto fui estudante e mais importante ainda ao longo de toda a minha vida, muito obrigada.

Ao longo de todo este processo e ao longo dos últimos dez anos houve alguém que sempre me apoiou e esteve sempre presente em todas as hesitações e conquistas da minha vida. Embora eu nem sempre fosse a melhor companhia deste-me a confiança e força necessárias para continuar e nunca desistir do meu percurso. Deste-me o teu amor e carinho nos momentos mais importantes e por isso te estou eternamente grata, Rúben.

De seguida, tenho de agradecer à minha orientadora Professora Doutora Hélia Oliveira pelo seu incansável apoio, disponibilidade e críticas construtivas. Se este trabalho existe é porque me acompanhou ao longo deste último ano, mostrando uma enorme competência e simpatia. Tenho de agradecer ainda a confiança que sempre depositou em mim, mesmo quando eu pensava que não iria conseguir.

Tenho de deixar aqui os meus sinceros agradecimentos à minha coorientadora Professora Doutora Maria Suzana Nápoles pelos seus conselhos e opiniões no que diz respeito ao rigor e formalismo matemático deste trabalho. Graças à sua disponibilidade e apoio foi possível refletir nos conceitos matemáticos de uma outra forma e que me deu muito gosto em fazer.

Em seguida as minhas palavras têm de ir para a Professora Anabela Candeias, pela disponibilidade total que sempre demonstrou e pela confiança e amizade que fomos construindo ao longo deste ano letivo. Nunca me vou esquecer a primeira vez que me pediu para dinamizar uma aula, pois significou muito para mim.

Um muito sincero obrigado à direção da Escola Secundária de Caneças e a toda a comunidade escolar por me terem recebido tão bem. Um especial agradecimento ao Professor Pedro Queiroz pela disponibilidade que demonstrou e pelos documentos fundamentais para este trabalho.

Este trabalho não seria possível sem a participação dos alunos da turma que me receberam no início do ano letivo. Foi um prazer trabalhar com esta turma e gostaria de agradecer o respeito, a generosidade e o interesse em participar neste estudo que sempre demonstraram. Gostaria também de agradecer a forma afetuosa como fui recebida pela turma da minha colega de estágio. Desejo a todos estes alunos um futuro muito risonho!

Quero deixar um agradecimento especial à minha família que direta ou indiretamente me ajudou ao longo deste processo. A ti pai, queria agradecer a liberdade que sempre me deste para escolher o meu caminho e pelo apoio que me deste ao longo deste percurso. Um beijinho muito especial à minha prima Joana por todos os sábados e domingos que querias brincar comigo às bonecas e por todos os desenhos que fizeste e preencheram todo o meu frigorifico! Um agradecimento especial à avó Isabel, por ter sido a verdadeira avó que nunca tive.

De seguida não posso deixar de deixar um agradecimento a todos os a meus amigos que sempre me acompanharam. Embora não possa falar de todos deixo aqui algumas palavras a alguns deles.

A ti Joana, além de teres sido a minha colega de estágio, tornaste-te numa grande amiga. Ao longo deste mestrado, a tua companhia os teus conselhos e principalmente os momentos de partilha foram muito importantes para mim. Tu e os teus pais abriram as portas da vossa casa para me receberem e isso é algo que nunca vou esquecer. Muito obrigada a todos.

À Sílvia, ao Filipe e à Inês, por tudo o que me deram nos últimos seis anos, muito obrigada. Além de estarem sempre disponíveis para me ajudar, tornaram os meus dias muito mais alegres e felizes. Convosco tornei-me numa pessoa melhor. Sejam felizes!

Mais uma vez, um grande obrigado a todos!

# Índice

# Índice de Figuras

# Índice de Tabelas

# Índice de Anexos

# Capítulo 1

# Introdução

Neste capítulo, inicialmente, apresento as minhas motivações pessoais que me levaram à realização deste estudo e de seguida descrevo, também, o objetivo e as questões de investigação que lhe serviram de base. Por último, faço uma breve descrição de como se irá organizar este estudo.

O presente estudo é o resultado de todo o trabalho desenvolvido ao longo da minha intervenção letiva, que decorreu no segundo período do ano letivo 2014/2015, na unidade didática "Taxa de Variação e Derivada" numa turma de 11.º ano do ensino secundário, da Escola Secundária com 3.º ciclo de Caneças.

Considerando que "a forma pela qual as ideias matemáticas são representadas é essencial para o modo como as pessoas compreendem e utilizam essas ideias" (NCTM, 2008, p. 75), com este estudo, procuro analisar a forma como os alunos compreendem o conceito de função derivada, como a utilizam para estudar as propriedades da função original, nas suas diferentes representações e as dificuldades que evidenciam ao trabalhar com estas ideias.

## 1.1. Motivações

Como aluna, a disciplina de Matemática sempre me despertou muito interesse, pois ao contrário de outras esta era exata. Sempre olhei para a Matemática quase como uma magia de números, que se foi tornando mais exigente, mas não menos estimulante. Foi por estas razões que nunca abandonei a hipótese de um dia trabalhar na área de Matemática, nomeadamente tornar-me professora de Matemática.

Além de gostar muito desta área, algo que sempre me intrigou foi o desinteresse e as dificuldades que muitos colegas meus tinham nesta disciplina. No que diz respeito ao conceito de derivada percebi que as dificuldades cresciam, pois várias "pesquisas indicam que, de um modo geral, os alunos não possuem conhecimentos aprofundados nesta área" (NCTM, 2008, p. 42).

Relativamente ao conceito de função, que é fundamental para compreender a noção de função derivada, alguns autores como Leinhardt, Zaslavsky e Stein (1990), Moschkovich, Schoenfeld e Arcavi (1993) (citados em NCTM, 2008, p. 40) defendem que os alunos "à medida que trabalham com representações múltiplas de funções, incluindo numéricas, gráficas e simbólicas, irão desenvolver um conhecimento mais compreensivo das funções". Perante isto, sempre tive curiosidade em estudar um pouco mais este tema e tentar compreender o porquê das dificuldades dos alunos.

Um outro motivo da escolha deste tema para o estudo deve-se à restrição dos tópicos matemáticos a trabalhar ao longo dos 2.º e 3.º períodos do 11.º ano, acabando por escolher a função derivada e a relação que esta estabelece com a função original. Embora tenha havido esta restrição devido ao período temporal em que a intervenção letiva teria de ser realizada, posso dizer que a vi de modo favorável pois de facto é uma das áreas que mais me fascinam na Matemática.

## 1.2. Objetivo e questões de investigação

O Programa de Matemática A do Ensino Secundário (ME, 2001) refere que a abordagem das funções reais de variável real deve considerar estudos dos diferentes pontos de vista, nomeadamente, o gráfico e algébrico e, desta forma, no âmbito da unidade didática que lecionei, o meu estudo dá uma atenção particular às diferentes representações de funções reais de variável real, ao investigar a compreensão dos alunos sobre a função derivada e da relação que se estabelece entre esta e a função original.

Assim, o objetivo do presente estudo é analisar a compreensão que alunos do 11.º ano revelam da noção de função derivada e a sua relação com a função original, em diferentes representações. Tendo em conta este objetivo e para me orientar no estudo, formulei as seguintes questões de investigação:

i) Como os alunos interpretam a noção de função derivada em diferentes representações?

ii) Como os alunos usam o seu conhecimento sobre a função derivada para analisar as propriedades da função original e reciprocamente?

iii) Que dificuldades persistem no final da unidade didática quanto à noção de função derivada e da relação entre esta e a função original e reciprocamente?

## 1.3. Organização do estudo

Tendo em conta o objetivo, as questões de investigação e a unidade didática em que se enquadra este estudo, o presente relatório é composto por vários capítulos que passo a descrever de seguida.

Após este capítulo introdutório, encontra-se um segundo capítulo de enquadramento curricular e didático onde faço uma revisão da literatura relacionada com o ensino do conceito de derivada, com especial enfoque nos processos de construção e nas diferentes representações dos conceitos matemáticos.

No capítulo seguinte “Unidade Didática” apresento a unidade de ensino que está na base deste estudo, onde descrevo as características dos alunos, bem como as do seu meio envolvente. Ainda neste capítulo procuro justificar as estratégias de ensino utilizadas, bem como apresentar as tarefas e fichas de trabalho usadas neste estudo, onde explicito os conceitos matemáticos envolvidos. Ainda neste capítulo descrevo as aulas lecionadas.

No quarto capítulo “Métodos e procedimentos de recolha de dados e análise de dados” apresento e justifico a escolha dos instrumentos de recolha de dados que foram utilizados neste estudo. Ainda neste capítulo procuro explicitar como vou proceder à análise dos dados, nomeadamente a sua organização.

No capítulo seguinte “Análise de dados” procuro analisar os dados recolhidos tendo em conta o objetivo e as questões deste estudo.

Por último, surge o sexto capítulo “Conclusão”, onde procuro responder às questões de investigação, tendo em conta a análise dos dados articulando com a teoria. Finalizo com uma reflexão sobre a minha prática letiva e as aprendizagens realizadas com o desenvolvimento deste estudo.

# Capítulo 2

# Enquadramento curricular e didático

Neste capítulo será feito o enquadramento da unidade didática em que realizei a minha intervenção letiva, tendo em conta o objetivo e questões de investigação.

Inicialmente serão abordados os *conceitos definição* e *conceito imagem*, problemática que tem vindo a ser estudada por vários autores, e como estes conceitos estão relacionados com a aprendizagem e construção de conceitos matemáticos, na temática das derivadas.

Depois apresento os vários tipos de representações de funções e o seu contributo para a aprendizagem de conceitos matemáticos, nomeadamente os abordados ao longo da unidade didática.

## 2.1. *Conceito imagem* e *Conceito definição*

Ao longo das últimas décadas diversos estudos têm sido realizados, no âmbito da Educação Matemática, sobre as dificuldades sentidas pelos alunos na aprendizagem de conceitos ligados ao Cálculo Diferencial e Integral ou Cálculo Infinitesimal (por exemplo os estudos realizados por investigadores como Tall, Vinner, Bingolbali e Monaghan, entre outros). O conceito de limite e de derivada são dois dos tópicos que a investigação tem mostrado revestir-se de grande complexidade na aprendizagem da Matemática (Orhun, 2012). Além da abstração que é necessária para a compreensão destes conceitos, os processos de representação que lhes estão inerentes são fatores que dificultam a sua compreensão (Orhun, 2012).

Em linha com resultados de estudos como estes, os programas de Matemática do ensino secundário têm privilegiado um ensino que não se foque apenas em cálculos e técnicas ou regras, nomeadamente, a determinação da função derivada de diversas funções, através das regras de derivação, pois desde modo os alunos não conseguirão compreender as ideias fundamentais associadas a este conceito (ME, 2002).

Deste modo, é importante perceber de que forma os conceitos matemáticos são compreendidos pelos alunos e que significado estes lhes atribuem, nomeadamente no momento em que estes conceitos são introduzidos, e como estas noções se vão desenvolvendo.

Vários estudos sobre a aprendizagem de conceitos matemáticos têm sido levados a cabo por investigadores como David Tall e Sholomo Vinner que defendem que a construção destes tem por base as noções de *conceito imagem* e *conceito definição* (Tall, 2001).

Segundo Domingos (2003, p. 27) "quando vemos ou ouvimos o nome de um conceito ele produz um estímulo, suscitando algo na nossa memória". Mesmo que este conceito possua uma definição, nem sempre se trata dessa definição no sentido usual, mas sim aquilo que Tall e Vinner designam por conceito imagem.

Estes autores (1981) definem conceito imagem como "a estrutura cognitiva total associada a um conceito matemático na mente de um indivíduo, onde se incluem todas as imagens mentais, propriedades, processos e representações" (p. 152), por outras palavras podemos dizer que corresponde a "algo não-verbal que na nossa mente é associado ou que nos remete para, quando se evoca um determinado conceito" (Loureiro, 2012, p. 30).

O conceito imagem pode ser uma "representação visual interna do conceito, no caso de este ter representações visuais" ou ainda "uma coleção de impressões e experiências" (Domingos, 2003, p. 27). Além disso, estes conceitos imagem vão crescendo e alteram-se com a "experiência e a reflexão" (Tall, 2001, p. 4) vividas pelo mesmo, já que são construídos por diversas partes que se desenvolvem em momentos diferentes e de formas distintas (Gil, 2014).

Ao longo da nossa vivência e experiência muitos dos conceitos que vamos utilizando podem não se encontrar na nossa mente plenamente definidos, mas vamos aprendendo a identificá-los e contextualizá-los. A identificação e contextualização vão sendo feitas no decurso do nosso dia-a-dia, de forma consciente ou não. Desta forma, vamos construindo e modificando significados e contextos dos conceitos ao longo dessa experiência (Domingos, 2003). Relativamente ao conceito de derivada, segundo Bingolbali e Monaghan (2008), o conceito imagem dos alunos modifica-se desde o momento em que tomam contacto com este até ao final do seu estudo.

De ressaltar que o conceito imagem formado pelo indivíduo pode nem sempre ser coerente, uma vez que diferentes estímulos podem ativar diferentes partes do conceito imagem, acabando por ser ativado um esquema mais ou menos relevante numa dada situação no cérebro do mesmo (Domingos, 2003). Devido a esta “não coerência”, podem surgir dificuldades nos alunos na aprendizagem de determinados conceitos que podem estar relacionadas com o conceito imagem que entra em desacordo com outra parte do conceito imagem (Domingos, 2003). De salientar que o desenvolvimento do conceito imagem dos alunos e a forma como estes constroem as relações entre as diferentes partes do conceito imagem de um determinado conceito matemático está intimamente relacionada com as perspetivas e práticas do professor (Bingolbali & Monaghan, 2008).

Além destas dificuldades com o conceito imagem podem surgir conflitos que Tall e Vinner (1981) denominam por “fatores potenciais de conflito” que podem surgir também com o conceito definição que é a “forma verbal a que um indivíduo recorre para explicar um dado conceito” (Tall & Vinner, 1981, p. 152). Segundo Vinner (1991) o conhecimento da definição de um conceito não nos garante a compreensão do mesmo e para adquiri-lo precisamos de formar um conceito imagem deste. Isto significa que para “alguns conceitos possuímos em simultâneo um conceito definição e um conceito imagem, mas em muitos outros isso não acontece” (Domingos, 2003, p. 28), ou seja, existem conceitos que podem não ter sido adquiridos por meio de uma definição e, no entanto, os conceitos imagem que temos deles são bastante claros.

Por outro lado, existem conceitos que podem ser introduzidos por meio de uma definição, acabando esta por apoiar a construção do conceito imagem dos próprios. No entanto, a partir do momento em que o conceito imagem se forme, na mente do indivíduo, a definição pode manter-se inativa ou até mesmo esquecida quando utilizamos esse conceito (Vinner, 1991).

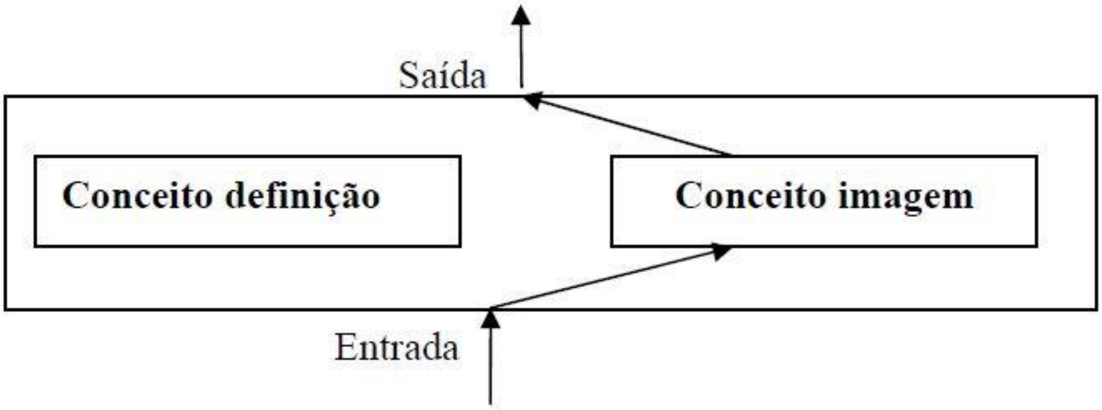



**Figura 1 - Resposta intuitiva quando apenas o conceito imagem é consultado (in Domingos, 2003)**

As definições podem ser ensinadas ou até mesmo construídas pelo próprio indivíduo. Quando são ensinadas, por exemplo uma definição de algum conceito matemático, nem sempre nos é familiar e, por vezes, são introduzidas antes mesmo de existir algum conceito imagem. Neste caso, espera-se que a “aprendizagem futura preencha esta lacuna” (Domingos, 2003, p. 28) e o facto de se continuar com esta prática pode estar na certeza de que estas “ajudam a formar os conceitos imagem” (p. 28) e que podem ser úteis para levar a cabo algumas tarefas cognitivas (Vinner, 1983, citado em Domingos, 2003). O que acontece por vezes é que algumas definições que são ensinadas podem ser complicadas de tratar, acabando por não ajudar na criação de conceitos imagem na mente dos nossos alunos (Domingos, 2003).

No caso de as definições serem construídas por nós, estas podem surgir, por exemplo, quando tentamos explicar um determinado conceito a alguém. Estas definições podem resultar da nossa experiência com o próprio conceito, podendo ser consideradas a descrição do conceito imagem que temos deste (Domingos, 2003). Assim, Domingos (2003) refere que Tall considera que o processo de formação de conhecimento matemático assenta numa ação de reciprocidade entre o conceito definição e o conceito imagem, onde o primeiro não é mais do que uma parcela do segundo que existe na nossa mente.

Como já referi anteriormente, por vezes o conceito imagem pode entrar em conflito com o conceito definição e estes podem causar dificuldades nos alunos quando estes contactam com conceitos mais formais (Domingos, 2003). Segundo este autor, os alunos que tenham este “fator de conflito cognitivo potencial no seu conceito imagem podem estar seguros nas suas próprias interpretações das noções em causa e ver a teoria formal simplesmente como inoperativa ou supérflua” (p. 35-36).

Uma vez que muitas vezes é dada uma ênfase à definição, nomeadamente no ensino de determinados conceitos matemáticos, Vinner (1991) considera que devem ser evitados conflitos cognitivos desnecessários nos alunos. Ainda segundo Vinner (1991), tem de existir uma mudança nos hábitos, onde a formação dos conceitos matemáticos deve começar com diferentes exemplos e contraexemplos. Além disso, quando os alunos começam a estudar “conceitos mais avançados a definição deve ser introduzida como o último critério das várias tarefas matemáticas” (Domingos, 2003, p. 33).

Desta forma, as definições dadas pelos professores devem ser discutidas com os alunos, para que estes as compreendam da melhor forma possível e saibam utilizá-las corretamente. Além disso, estas definições apenas “devem ser utilizadas se as tarefas não puderem ser resolvidas corretamente referindo-se somente aos conceitos imagem” (Domingos, 2003, p. 33), pois os conceitos matemáticos devem ser adquiridos começando com “vários exemplos e contraexemplos pelo meio dos quais o conceito imagem poderá ser formado” (idem).

Assim, sendo os conceitos de derivada, de função derivada e a relação que se estabelece entre a última e a função original difíceis a nível conceptual, o professor deve ter em atenção os conceitos imagens formados pelos alunos na forma como os aborda e também evitar os conflitos cognitivos referidos anteriormente, pois é necessário que os alunos conheçam algumas definições formais destes conceitos.

## 2.2. Representações de Funções

Na Matemática, as representações desempenham um papel crucial, em particular, a compreensão de conceitos como o de derivada e o de função derivada dificilmente são conseguidos sem o recurso a várias representações (Consciência & Oliveira, 2011; Aspinwall, Shaw & Presmeg, 1997). Quando os alunos conseguem aceder às “representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente” (NCTM, 2008, p. 75).

Além do NCTM, nos EUA, citado anteriormente, também em Portugal tem sido realçada a importância das representações e do desenvolvimento da capacidade de relacionar múltiplas representações dos conceitos matemáticos (Carvalho, Ferreira, & Ponte, 2011). Em particular no ensino secundário, no Programa de Matemática A (ME, 2001), no estudo das funções e no cálculo diferencial, é muito valorizada a combinação das resoluções algébrica, numérica e gráfica dos problemas. A representação algébrica refere-se aos símbolos matemáticos que são utilizados para definir a função e as suas propriedades, a representação numérica refere-se ao uso de valores numéricos, muitas vezes dispostos numa tabela, e a representação gráfica refere-se às formas e propriedades dos gráficos de funções (Kendal & Stacey, 2003).

As pesquisas de Krutetskii (1976, citado em Haciomeroglu, Aspinwall, & Presmeg, 2010) mostram que um aluno que tenha um pensamento mais analítico baseia-se precisamente em processos analíticos e acaba por se apoiar pouco em processos visuais e, por outro lado, um aluno que tenha um pensamento mais visual baseia-se pouco em processos analíticos. Além disso, pesquisas de Orhun (2012) mostram que, para os alunos, muitas vezes o conceito de derivada está associado às regras de derivação e que não conseguem interpretar o gráfico da função derivada.

Os atuais programas de Matemática também têm alertado para a importância das diferentes representações, e autores como Carvalho, Ferreira e Ponte (2011) também referem a importância no estabelecimento de ligações entre essas diferentes representações para que os alunos compreendam verdadeiramente o significado dos conceitos e tornar a sua aprendizagem mais significativa.

A verdade é que o conceito de derivada tem sido contemplado nas sucessivas reformas curriculares do ensino da Matemática, no ensino secundário, mas mesmo quando os programas recomendavam uma exploração gráfica do mesmo, os “procedimentos analíticos eram os mais valorizados (…), sendo os conceitos inerentes à derivada de uma função transmitidos de uma forma desligada da sua componente gráfica, e sem qualquer análise crítica da importância dos seus significados” (Almeida & Viseu, 2002, p. 194).

Vinner (1989, citado em Almeida & Viseu, 2002) justifica que a predominância de abordagens algébricas no ensino da Matemática deve-se à crença de que a prova visual não é realmente uma prova matemática. Além disso, são muitas vezes os professores que evitam usar argumentos visuais pois consideram que o argumento analítico é mais exato e que não exige grandes explicações, tornando-se mais fácil de aprender e consequentemente mais fácil de aplicar em exercícios. Por ser mais simples, alguns professores consideram também mais fácil de ensinar pois não requer preparação de algum suporte computacional e, por último, o argumento analítico é aquele que corresponde ao que os próprios alunos esperam encontrar numa prova matemática (Almeida & Viseu, 2002).

Outro fator importante para a aprendizagem dos conceitos matemáticos através de diferentes representações diz respeito ao espírito crítico dos alunos. Segundo Kendal e Stacey (2003), os alunos muitas vezes sentem-se confortáveis com a obtenção de diferentes resultados usando diferentes representações, não conseguindo perceber que esses resultados são inconsistentes. Isto deve-se ao facto de os alunos demonstrarem dificuldades em traduzir as informações que as diferentes representações lhes transmitem, sem compreenderem por completo as ligações que existem entre elas (Semião & Canavarro, 2008), dado não terem desenvolvido a capacidade de relacionar as diferentes representações.

Será então importante perceber porque é que as diferentes representações podem contribuir para uma melhor compreensão de muitos conceitos matemáticos, nomeadamente o de função derivada, pois como referem Almeida e Viseu (2002): “a aquisição do conhecimento matemático processa-se, fundamentalmente, através de representações e modelos” (p. 195). Ainda, segundo estes autores, seguindo Goldin (2008) existem dois tipos de representações, as internas e externas.

> As representações internas são imagens mentais construídas sobre a realidade, referindo-se a modelos cognitivos, conceitos ou objetos mentais, não sendo, portanto, diretamente observáveis, e podendo apenas ser inferidas através da ação e das palavras dos indivíduos. Por seu lado, as representações externas são construídas para ilustrar uma dada situação matemática, incluindo as notações simbólicas ou gráficas, específicas de cada conceito (2002, p. 195).

Segundo Goldin (2008, p. 181) é o "nível interno que determina em grande parte a utilidade desses sistemas de representação externos, de acordo com a forma como os indivíduos os compreendem e interagem com eles".

Utilizando alguns exemplos, por um lado, podemos considerar o externo a representar o interno, quando um aluno elabora um esquema para expressar as suas ideias e, por outro lado, podemos tomar o interno para representar o externo, quando um aluno "visualiza" uma representação gráfica a partir de uma representação algébrica (Consciência, 2013). Estes exemplos mostram a "perspetiva bidirecional da relação de representação" (p. 81), segundo esta autora.

Desta forma, quando pensamos num conceito matemático formamos imagens mentais, ou seja, formamos representações internas desse conceito, e comunicamo-las através das representações externas. É certo, que nem todas as imagens mentais têm características visuais ou gráficas, mas quando estas existem podemos falar em visualização. Esta capacidade de visualizar tem de ser desenvolvida, pois temos de conseguir interpretar e entender a informação que uma imagem ou gráfico nos está a transmitir. Assim, quando se usa representações gráficas de um conceito matemático a visualização torna-se um meio para chegar à compreensão (Almeida & Viseu, 2002).

Uma das razões que Eisenberg e Dreyfus (1991, citados em Almeida & Viseu, 2002) apontam, que permite perceber um pouco melhor o porquê de os alunos não recorrerem à visualização, é de natureza cognitiva e tem a ver com a quantidade, complexidade e concentração de informação explícita numa representação visual e implícita na representação analítica. Esta pode ser uma das razões para que os alunos não se sintam à vontade em utilizar representações visuais para resolver uma determinada situação. O tipo de ensino que os alunos têm experimentando também poderá estar na origem de estes não desenvolverem a tal capacidade de visualizar um conceito matemático, não estabelecendo conexões entre o seu pensamento analítico com o visual. Isto mostra que o estabelecimento de conexões entre as notações algébrica e gráfica do conceito de derivada poderá "ajudar os alunos a compreender (…) como é que a derivada se pode estender de um ponto para um intervalo e as suas propriedades nesse intervalo" (Park, 2015, p. 233), já que segundo este autor esta transição não é trivial para os alunos.

Relativamente ao conceito de função derivada, estudos realizados por Orhun (2012) mostram que os alunos sentem dificuldades em estabelecer conexões entre o gráfico da função derivada com o da função original, pois estes interpretam o gráfico da função derivada apenas como o gráfico de uma função real de variável real, não conseguindo pensar e argumentar matematicamente, a partir deste, para analisar as propriedades da função original. Já no estudo de Gil (2014) os alunos evidenciam "conhecer o procedimento associado ao estudo de variação de uma função, através do sinal da sua derivada, evidenciando também, (…) uma utilização deste conceito centrada nas regras e procedimentos" (p. 114).

É também pouco frequente pedir-se aos alunos que façam interpretações geométricas das derivadas de uma determinada função, e talvez por isso estes não conseguem determinar a reta tangente à curva de uma função num dado ponto a partir de uma representação gráfica da mesma. Assim, o conceito imagem do conceito de derivada estabelecido pelos alunos encontra-se limitado, pois não estabelecem a relação da derivada num ponto, para a função derivada representada graficamente, encarando-a apenas como uma expressão algébrica que se obtém a partir da função original.

Segundo um estudo de Habre e Abboud (2006), no que diz respeito ao conceito de derivada, muitos alunos falham quando lhes é pedido que definam derivada geometricamente. Estes autores referem ainda que esta dificuldade é "uma consequência do facto das definições matemáticas serem tradicionalmente analíticas, criando um obstáculo ao raciocínio dos alunos" (p. 68).

Zimmermann (1991) defende que a componente visual é tão fundamental para compreender conceitos matemáticos que é difícil ter sucesso sem nunca "enfatizar nos elementos visuais desses conceitos" (p. 136). Assim, como a representação gráfica de um conceito matemático pode assumir um papel muito importante numa perceção mais completa do mesmo, o professor nas suas práticas pedagógicas deve promover esta capacidade de visualização nos alunos. Desta forma, os alunos em vez de aprenderem uma grande quantidade de algoritmos e regras, se conseguirem relacionar as representações analíticas e gráficas de conceitos matemáticos poderão ter mais sucesso na disciplina de Matemática e vê-la de uma forma mais global e estabelecendo conexões entre os conceitos.

Segundo Goldin (2008), com a introdução das calculadoras, dos computadores e outras tecnologias, existe a possibilidade de ligar e mudar dinamicamente as representações externas e internas. De acordo com Kendal e Stacey (2003), o apoio da tecnologia para trabalhar com as diferentes representações de funções, algébrica, numérica e gráfica, é fundamental para os professores ensinarem cálculo diferencial. Ainda segundo Tall e Kaput (1996, 1998, citados em Kendal & Stacey, 2003) com as experiências que os alunos vivenciam com a tecnologia têm mais oportunidades de conseguirem perceber as ligações que envolvem as representações numérica, gráfica e algébrica, pois adquirem conhecimento necessário para o fazer.

Tal como defende o NCTM (2008) a tecnologia, como os computadores e as calculadoras, vem "mudar o que os alunos podem realizar com representações convencionais e ampliar o conjunto de representações com as quais podem trabalhar" (p. 77). Além disso, à medida que os alunos aprendem a usar estas novas e versáteis ferramentas, poderão também "refletir sobre os pontos em que algumas representações utilizadas nas tecnologias diferem das representações convencionais" (p. 77).

Relativamente à calculadora gráfica, segundo um estudo de Consciência (2013) os alunos recorrem a este recurso sempre que é pedida a representação gráfica de uma função definida por uma expressão algébrica, pois esta é um artefacto que "efetua rapidamente a conversão da representação algébrica na gráfica" (p. 511). Além disso, ainda segundo esta autora os alunos recorrem à calculadora gráfica não só para resolver determinadas situações que não conseguem resolver analiticamente, bem como confirmar resultados obtidos por via algébrica e para explorar situações problemáticas.

No que diz respeito à utilização de computadores em sala de aula, com recurso a programas de geometria dinâmica e *applet*, segundo o estudo de Loureiro (2012) o tipo de abordagem realizada ao conceito de derivada de uma função num ponto, aliada a este tipo de recursos permite aos alunos construir imagens mentais relacionadas com o conceito, conseguindo também realizar uma interpretação geométrica do valor da derivada correta.

Assim, uma forma de os professores lecionarem os conceitos de derivada e função derivada, desenvolvendo as três representações em simultâneo, para que os alunos compreenderam o seu verdadeiro significado, é introduzindo nas suas práticas letivas as tecnologias. Para o fazer, devem ter em atenção as tarefas que propõem aos alunos, para que estas promovam uma utilização das diferentes representações e que proporcionem aos alunos uma construção das "ideias matemáticas mais concretas e acessíveis à reflexão" (NCTM, 2008, p. 76).

# Capítulo 3

# Unidade Didática

Este estudo tem por base a minha intervenção letiva numa turma de 11.º ano de escolaridade, na unidade didática Taxa de Variação e Derivada.

Neste capítulo apresento, inicialmente uma caracterização do contexto escolar, de seguida o enquadramento da unidade didática no programa de matemática do ensino secundário e as estratégias de ensino adotadas. Posteriormente, apresento as tarefas utilizadas e os principais conceitos matemáticos e, por último, faço uma breve descrição das aulas lecionadas.

## 3.1. Contexto Escolar

### 3.1.1. Caracterização da escola

A minha intervenção letiva foi realizada no Agrupamento de Escolas de Caneças, situado na freguesia de Caneças, concelho de Odivelas. Este agrupamento, segundo o Projeto Educativo de Escola (2009) é constituído por cinco escolas, três das quais do 1.º ciclo, em que duas destas incluem também o Jardim-de-infância, uma escola de 2.º e 3.º ciclos e a escola sede, com 3.º ciclo e ensino secundário.

A escola sede, Escola Secundária de Caneças, está inserida num contexto com origens socioeconómicas diferenciadas, mas não se verificando separações significativas de grupos ou núcleos de alunos com impacto na organização escolar.

### 3.1.2. Caracterização da turma

A turma que acompanhei ao longo deste ano letivo frequenta o 11.º ano de escolaridade, no curso de Ciências Socioeconómicas. É composta por 14 alunos, dos quais seis são rapazes e oito são raparigas. Desde o início do ano letivo houve algumas alterações a esta constituição, pois duas alunas saíram desta turma, e houve a entrada de três alunos que apenas frequentam a disciplina de Matemática A no 11.º ano, frequentando as outras disciplinas no 12.º ano.

No início do ano letivo, a média das idades desta turma era $15{,}8$ anos mas devido às alterações referidas acima a média de idades aumentou para $16{,}4$ anos, sendo que a maioria da turma de base, ou seja, os alunos que apenas frequentam o 11.º ano, nunca reprovou.

De uma forma geral, e tendo em conta a opinião de professores da turma, nomeadamente a professora cooperante e o diretor de turma, os alunos são bastante participativos e interessados, com bom comportamento e sem casos de mau comportamento a registar. A Figura 2 ilustra o aproveitamento satisfatório da turma, no 2.º Período, nas várias disciplinas, sendo que as classificações mais frequentes situam-se entre os 10 e 13 valores.

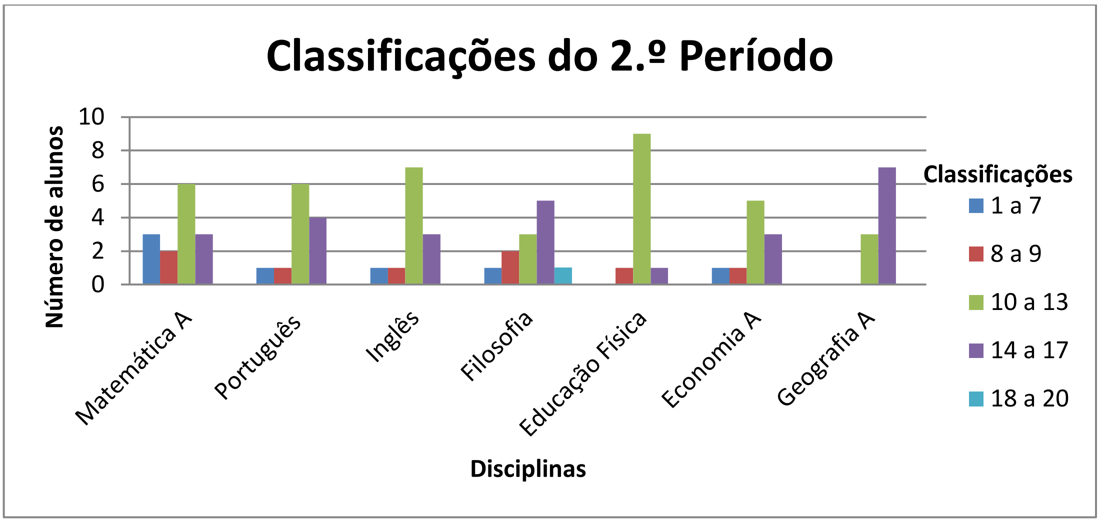



**Figura 2 - Classificações do 2.º Período**

É visível também, na Figura 2, que a disciplina de Matemática A é a que apresenta uma maior taxa de insucesso, 35,7%, embora tenha havido uma melhoria relativamente à taxa de insucesso do 1.º Período que se situava em 42,9%. É também nesta disciplina que se verifica o maior número de classificações inferiores a sete valores.

No que diz respeito às classificações da turma no 2.º período na disciplina de Matemática A posso dizer que foram satisfatórias, em que a maioria dos alunos tem classificação positiva, como é observável na Figura 3.

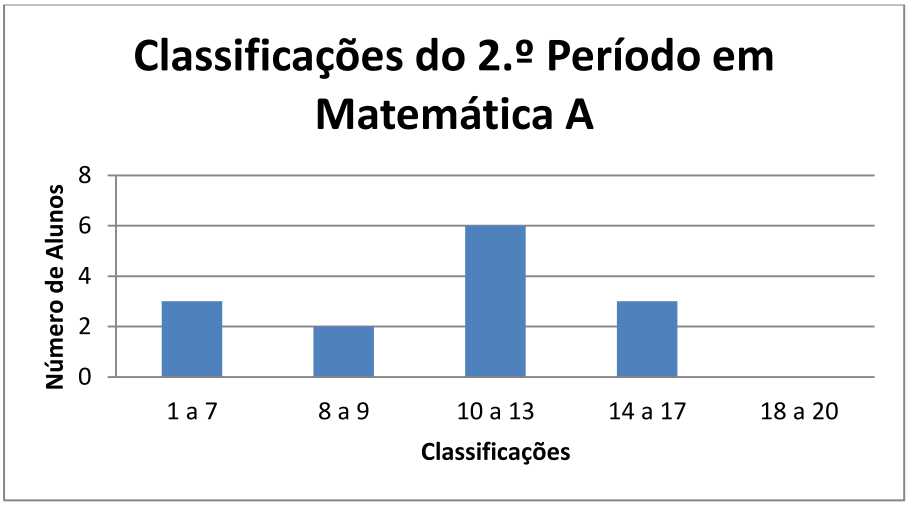



Figura 3 - Classificações do 2.º Período na disciplina de Matemática A

No final do ano letivo os resultados da turma revelam que de facto são regulares, não havendo grandes alterações na maioria das disciplinas. É possível verificar, pela figura seguinte (Figura 4) que diminuiu o número de alunos com classificações inferiores a sete valores, na generalidade das disciplinas.

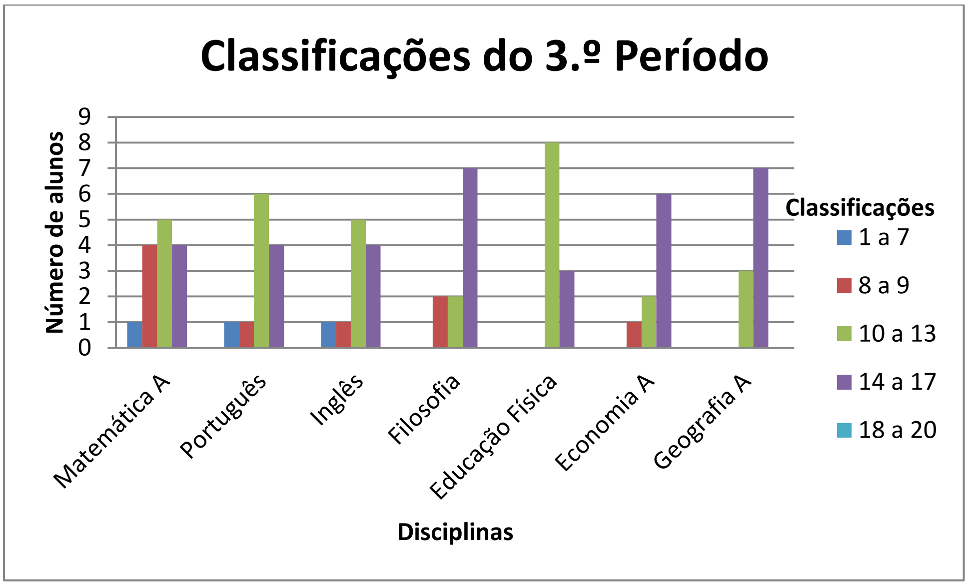



Figura 4 - Classificações do 3.º Período

No que diz respeito à disciplina Matemática A, no 3.º período houve uma ligeira melhoria nos resultados, pois embora a taxa de insucesso se tenha mantido no 3.º Período, 35,7%, a percentagem de alunos com classificações superiores a catorze valores, subiu para 28,6%, enquanto no 2.º Período era de

21,4%. Embora o valor da taxa de insucesso não tenha diminuído, foi menor o número de alunos com classificações inferiores a sete valores, como se pode verificar na Figura 5.

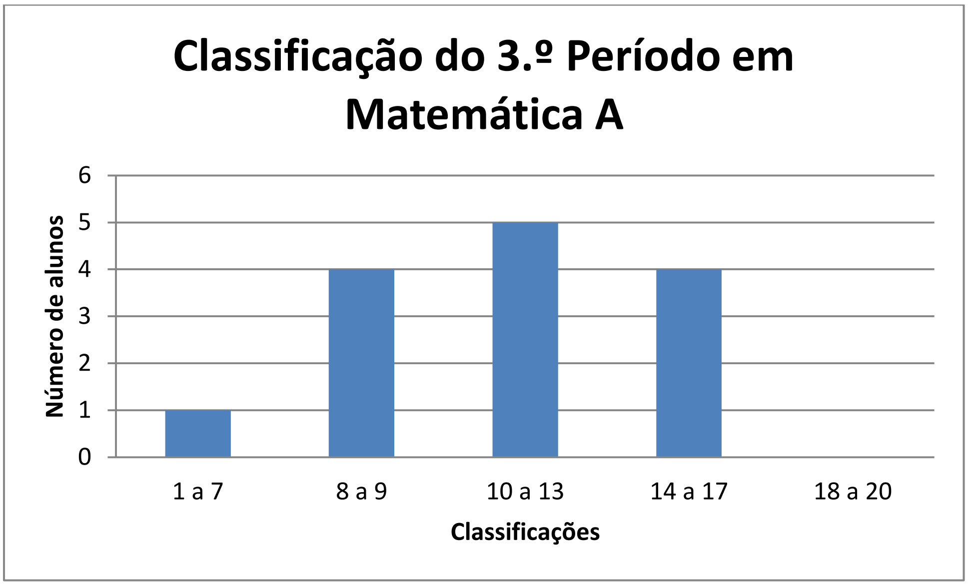



**Figura 5 - Classificações do 3.º Período na disciplina de Matemática A**

Ao longo do ano letivo, nas aulas de Matemática A, os alunos sempre se revelaram participativos e interessados, tendo havido, uma melhoria na sua autonomia e confiança para participarem ativamente nas aulas. Relativamente à pontualidade e assiduidade da turma, devido a duas das aulas terem um horário imediatamente a seguir à hora de almoço, foram frequentes os atrasos de vários alunos, embora na maioria das aulas não se tenha verificado faltas de presença.

## 3.2. Ancoragem e Organização da Unidade Didática

A unidade didática que lecionei intitula-se “Taxa de Variação e Derivada” e enquadra-se no Programa de Matemática A do ensino secundário, no 11.º ano de escolaridade, no tema Introdução ao Cálculo Diferencial I. Neste tema são introduzidas novos tipos de funções, as funções racionais e as funções com radicais, e onde são abordadas as noções de taxa média de variação e taxa de variação/derivada recorrendo a um uso informal da noção de limite (ME, 2002; Teixeira, Precatado, Albuquerque, & Nápoles, 1998).

Deste modo seria necessário que os alunos compreendessem a noção de limite, mesmo de uma forma intuitiva, para que a noção e a definição de taxa de variação fosse melhor compreendida. Além disso, as operações com funções, que são abordadas tanto no 10.º como no 11.º ano de escolaridade são importantíssimas para que os alunos sejam capazes de trabalhar eficazmente e sem grandes dificuldades com as expressões algébricas das funções derivada e função original. Ainda no 11.º ano, no 1.º Período, no tema Geometria no Plano e no Espaço II, é abordado o conceito de tangente, por exemplo, a tangente a uma circunferência, que é depois "estendido ao estudo das funções onde é possível relacionar a tangente ao gráfico com o conceito de derivada" (Domingos, 2003, p. 95).

Além dos conceitos já referidos, foram necessários estabelecer também como pré-requisitos a função módulo, trabalhada no 10.º ano de escolaridade e as equações fracionárias que são muito importantes para o estudo das funções racionais, noção abordada imediatamente antes desta unidade didática.

Como objetivos específicos estabelecidos para as subunidades didáticas, "Taxa média de variação. Taxa de variação" e "Função derivada. Derivada de algumas funções", que constituem a unidade didática lecionada tem-se: compreender a noção e cálculo de taxa média de variação e taxa de variação; interpretar geometricamente a taxa de variação; compreender a definição de derivada; compreender a noção de derivada como função; determinar a função derivada de algumas funções e compreender a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função.

No tema onde se insere a unidade didática lecionada, o Programa (ME, 2001) também refere que o estudo das funções reais de variável real deve ser feito através de várias abordagens, ou seja, a numérica, a algébrica e a gráfica, para que o mesmo seja mais completo e para que os alunos tenham aprendizagens mais significativas. Assim, o uso das tecnologias, tema transversal ao longo de todo o programa, como a calculadora gráfica e o *software* de geométrica dinâmica GeoGebra também foram contemplados na planificação da unidade. Estes recursos tornam-se fundamentais para a compreensão de vários conceitos, nomeadamente na interpretação geométrica de taxa média de variação e taxa de variação e através deles é possível a visualização de inúmeros gráficos de funções, nomeadamente da função derivada e da função original, ajudando os alunos a desenvolver o seu espirito crítico quanto à relação que se estabelece entre elas.

Devo referir ainda que os tópicos e objetivos para cada aula da intervenção letiva tiveram em conta capacidades transversais que os alunos deveriam desenvolver. Como o Programa de Ensino Secundário (ME, 2001, p. 10) "pretende dar continuidade (…) às aprendizagens realizadas no 3º ciclo (…), ajustando-se ao nível de desenvolvimento e de cultura dos estudantes" foram consideradas as capacidades transversais do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), em vigor no período em que estes alunos frequentaram o 3.º ciclo.

A intervenção letiva que serviu de base a este estudo foi realizada no final do 2.º período e contemplou 12 blocos de aulas de 90 minutos. Para cada aula desta intervenção realizei um plano de aula (Anexo 1), onde constam os tópicos/subtópicos abordados nas mesmas, os objetivos específicos a alcançar, as tarefas a realizar, os recursos a utilizar, a enumeração dos diversos momentos das aulas, com indicação do tempo previsto para cada um deles, bem como uma descrição das possíveis estratégias de resolução dos alunos e possíveis dificuldades. É importante referir que o não cumprimento completo de todo o plano de aula, gerou algumas modificações de aula para aula, pelo que se pode observar algumas repetições, em determinados planos de aula, mas que não correspondem a uma repetição efetiva em aula. Os principais tópicos/subtópicos, objetivos específicos e tarefas realizadas em cada aula (ver Anexo 2) da minha intervenção letiva encontram-se sintetizados na tabela seguinte (Tabela 1):

| Aula e Data | Tópicos/Subtópicos | Objetivos | Tarefas |
|---|---|---|---|
| **1.ª Aula** 24/02/2015 | ○ Noção de Taxa média de variação;<br>○ Cálculo da taxa média de variação. | ○ Compreender a noção de taxa média de variação num intervalo;<br>○ Compreender a relação entre o sinal da taxa média de variação e a monotonia da respetiva função num intervalo;<br>○ Interpretar geometricamente a taxa média de variação. | Tarefa: "Estância de Ski" |
| **2.ª Aula** | ○ Noção de Taxa de | ○ Interpretar geometricamente a | Tarefa: |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 26/02/2015 | variação;<br>○ Cálculo da taxa de variação;<br>○ Interpretação geométrica da taxa de variação;<br>○ Definição de derivada. | taxa média de variação;<br>○ Compreender a noção de taxa de variação de uma função num determinado instante (derivada);<br>○ Interpretar geometricamente a taxa de variação. | "Estância de Ski"<br><br>Tarefa: "Continuando na Estância de Ski" |
| **3.ª Aula**<br>27/02/2015 | ○ Noção e cálculo da taxa média de variação;<br>○ Noção e cálculo de taxa de variação;<br>○ Interpretação geométrica da taxa de variação;<br>○ Definição de derivada. | ○ Interpretar geometricamente a taxa de variação;<br>○ Consolidar as noções de taxa média de variação, taxa de variação e derivada. | Tarefa: "Continuando na Estância de Ski" |
| **4.ª Aula**<br>2/03/2015 | ○ Determinação da derivada em casos simples: função polinomial do 2.º grau. | ○ Consolidar as noções de taxa média de variação, taxa de variação e derivada;<br>○ Compreender a noção de derivada enquanto função;<br>○ Calcular a função derivada das funções polinomiais de 2.º grau. | Tarefa: "Derivando ponto a ponto" |
| **5.ª Aula**<br>5/03/2015 | ○ Determinação da derivada em casos simples: função afim, funções polinomiais do 2.º e 3.º grau e função racional do 1.º grau. | ○ Calcular a função derivada da função afim;<br>○ Calcular as funções derivadas das funções polinomiais de 2.º e 3.º grau;<br>○ Calcular a função derivada da função racional do 1.º grau;<br>○ Consolidar conceitos abordados nas aulas anteriores. | |
| **6.ª Aula**<br>6/03/2015 | Teste de Avaliação | | |
| **7.ª Aula**<br>10/03/2015 | ○ Determinação da derivada em casos simples: função módulo. | ○ Calcular a derivada da função módulo;<br>○ Consolidar os conceitos abordados nas aulas anteriores. | Ficha de trabalho nº 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **8.ª Aula** 12/03/2015 | ○ Constatação, por argumentos geométricos, de que:<br>i. se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo;<br>ii. se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto. | ○ Compreender a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função. | Tarefa: "Evolução das bactérias" |
| **9.ª Aula** 13/03/2015 | (Segue os tópicos/subtópicos da aula anterior) | ○ Consolidar a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função. | Ficha de trabalho nº 2 |
| **10.ª Aula** 17/03/2015 | (Segue os tópicos/subtópicos da aula anterior) | ○ Consolidar a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função. | Ficha de trabalho nº 2 |
| **11.ª Aula** 19/03/2015 | (Segue os tópicos/subtópicos da aula anterior) | ○ Consolidar a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função. | Ficha de trabalho nº 3 |
| **12.ª Aula** 20/03/2015 | (Segue os tópicos/subtópicos da aula anterior) | ○ Consolidar a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função. | Ficha de trabalho nº 3<br><br>Ficha de trabalho nº 4 |

**Tabela 1 - Plano de Intervenção das Aulas Lecionadas**

Gostaria ainda de referir que, embora a minha intervenção letiva tenha incidido sobre toda a unidade didática, este estudo está focado na segunda subunidade didática lecionada, Função Derivada e Derivada de algumas funções e nos tópicos, Derivadas de algumas funções e Sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos a uma função. Não deixou de ser muito importante a lecionação da primeira subunidade, pois deu-me a oportunidade de pensar como se articulam os vários tópicos e noções ao longo da unidade, e também perceber como os próprios alunos estavam a evoluir à medida que compreendiam os conceitos.

## 3.3. Estratégias de ensino

Tendo em conta a unidade didática lecionada, nomeadamente o número de aulas, as metodologias foram variadas, as estratégias diversificadas e as tarefas foram de várias naturezas. A planificação das doze aulas que foram lecionadas teve em conta uma visão da unidade didática a médio prazo, nunca esquecendo os objetivos específicos pretendidos para cada tópico abordado e cada tarefa realizada, bem como as características, conhecimentos prévios e dificuldades dos alunos. Além disso, não foram esquecidos o objetivo deste estudo e as suas questões de investigação.

Quando penso em estratégias que podem ser adotadas penso também na atividade do professor e do aluno, ou seja, naquilo que o professor espera que este faça e portanto, essas estratégias vão estar dependentes dos objetivos que pretendo para cada uma das aulas e para cada um dos seus momentos. Deste modo, qualquer estratégia que possamos planear não está livre de ser modificada, ou melhor, adaptada face às dificuldades encontradas pelos alunos. Assim, algo que tentei não modificar ao longo da lecionação da unidade didática foi a dinâmica habitual do modo de trabalho da turma, que normalmente trabalha a pares durante as aulas. Além disso, a aprendizagem cooperativa pode favorecer o conhecimento matemático, pois a comunicação entre colegas pode apoiar a compreensão e aquisição de estratégias e os alunos mostram-se mais confiantes, autónomos e persistentes, desenvolvendo a sua capacidade de comunicação e aprendem a ser bons ouvintes (Nunes, 1996).

Devido ao que foi referido não foi possível definir claramente uma estratégia de ensino. Assim, houve momentos onde o professor teve um papel mais central e outros momentos em que a estratégia foi o ensino-aprendizagem exploratório em que o professor deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem (Ponte, 2005).

É claro que estas duas estratégias de ensino apresentadas poderão não ser extremas e o professor pode adotar versões intermédias. Assim, considero que mesmo nas aulas em que foi necessário um papel mais direto da minha parte, tentei nunca esquecer a participação dos alunos, colocando-lhes questões, para que estes acompanhassem o que estava a ser tratado.

Ao longo da unidade didática, e nunca perdendo de vista o objetivo deste estudo e as suas questões de investigação, tentei que houvesse uma maior ênfase em tarefas de exploração, em que o “professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem” (Ponte, 2005, p. 13). Com estas tarefas pretendia que os alunos descobrissem por si determinados conceitos como o de taxa média de variação, taxa de variação e suas interpretações geométricas, função derivada e a relação que se estabelece entre a função derivada e a função original e as suas propriedades. Nestas aulas de ensino exploratório há uma forte interação entre o professor e os alunos, onde o primeiro tem o papel de gerir todas estas interações e os vários momentos de aula. Estes momentos são: introdução da tarefa, realização da tarefa, discussão da tarefa, sistematização das aprendizagens (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013).

No primeiro momento, apresento a tarefa a realizar, explicitando os seus objetivos e metodologia de trabalho a adotar. É importante que neste momento os alunos partam para a realização da tarefa motivados e nas mesmas condições, pelo que devo esclarecer qualquer dúvida que surja em relação ao enunciado da tarefa ou ao modo como vai funcionar a aula.

Após este momento, a aula passa para os alunos, onde estes trabalham autonomamente e o professor deve assumir uma posição mais passiva, mas sempre apoiando os alunos, caso estes necessitem. Durante este apoio devo ter em atenção a forma como respondo aos alunos, quando estes colocam questões sobre a tarefa, pois devo evitar responder diretamente a estas questões, tentando responder com outras perguntas para que a tarefa não perca o seu sentido de exploração e para que os alunos pensem um pouco mais sobre o assunto que estavam a tratar. O professor deve também perceber "a profundidade com que os alunos estão a abordar ideias matemáticas significativas" (Stein & Smith, 2009, p. 28) e se a tarefa está a ser estimulante para os mesmos. Ainda durante este momento, devo ter em atenção a dúvidas ou dificuldades generalizadas ou persistentes dos alunos, pois neste caso a aula é interrompida para esclarecê-las.

O momento seguinte diz respeito à discussão, em grande grupo, dos resultados obtidos pelos alunos. Este momento é fundamental pois os alunos podem refletir sobre aquilo que realizaram durante a resolução da tarefa e podem confrontar resoluções e modos de pensar provavelmente diferentes (Saraiva, Teixeira & Andrade, 2010) contribuindo deste modo para a sua aprendizagem dos conceitos abordados ao longo da unidade didática. Os alunos podem ser chamados ao quadro para apresentarem as suas resoluções, como estas discussões podem surgir oralmente. Durante a minha intervenção letiva as discussões foram dos dois tipos, dependendo sempre do trabalho que os alunos tinham realizado, bem como do tipo de questões que a tarefa apresentava. Este momento de discussão permite o desenvolvimento da comunicação dos alunos, que é uma parte essencial da educação matemática (NCTM, 2008). É durante esta discussão que os alunos podem partilhar ideias e desenvolver a sua compreensão matemática (NCTM, 2008), a sua capacidade de argumentação e de comunicação matemática (Saraiva, Teixeira & Andrade, 2010).

O meu papel do durante o momento de discussão é de moderadora (Ponte, 2005) e orientadora das ideias que estão a ser apresentadas e discutidas pelos alunos. É importante ter em atenção se todos os alunos da turma estão a participar na discussão. Além disso, devo garantir que todas as dúvidas fiquem esclarecidas neste momento e que todos os erros, que os alunos poderão ter cometido, sejam corrigidos.

O último momento diz respeito à sistematização das aprendizagens, onde pretendo fazer uma síntese dos conceitos e conclusões obtidas pelos alunos, durante a discussão. Mais uma vez, esta sistematização deve ser feita sempre em interação com os alunos, para que todos compreendam todos os conceitos abordados.

Ao longo da unidade didática e das tarefas apresentadas aos alunos tive o cuidado de integrar a tecnologia nas aulas que lecionei, pois tal como o programa (ME, 2001) sugere a dimensão gráfica só é plenamente atingida quando os alunos trabalham com uma grande quantidade e variedade de representações gráficas com o apoio de tecnologia adequada. Algumas das tarefas apresentadas aos alunos tinham também como objetivo estes trabalharem com um *software*, GeoGebra, que "possibilita o trabalho simultâneo no ambiente geométrico e algébrico" (Oliveira & Domingos, 2008, p. 282) e "é a associação destas duas valências que o caracteriza e distingue de outros ambientes de geometria dinâmica" (Colaço, Branco, Brito & Rebelo, 2009, p. 1). Além deste *software,* a calculadora gráfica também esteve presente, pois com este recurso existe a "possibilidade de se testar rapidamente hipóteses para que as conjeturas sejam reformuladas e coordenar aspetos gráficos e algébricos, de modo a elaborar conjeturas com base nestas duas representações" (Ramos & Raposo, 2008, p. 199). Com estes recursos pretendia que os alunos se envolvessem mais com as tarefas apresentadas e apoiando-os na construção de conceitos e, além disso, tivessem a oportunidade de compreenderem a utilidade dos mesmos. Tal como sugere NCTM o uso destas tecnologias proporcionam "imagens visuais das ideias matemáticas, facilitam a organização e a análise de dados, e realizam cálculos de forma eficaz e exata" (2008, p. 26).

Para que os alunos compreendessem os conceitos envolvidos em toda a unidade didática e, em particular, na relação entre a função derivada e a função original, considero que as tarefas tinham de ter diversas naturezas, desde as de exploração como já referi, mas também exercícios de consolidação e resolução de problemas. Tal como Ponte (2005) defende esta diversificação é necessária porque cada tipo de tarefa desempenha um papel importante para alcançar certos objetivos curriculares, nomeadamente o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, o desenvolvimento da sua autoestima, da sua autonomia, bem como a sua "capacidade de lidar com situações complexas" (p. 17).

Em contexto de resolução de problemas, capacidade transversal do programa de matemática (ME, 2007), no caso da unidade didática que lecionei os problemas de otimização, é necessário que os alunos compreendam o enunciado e contexto do mesmo, as hipóteses iniciais que lhes são dadas e a pergunta do problema. O professor, no decurso do trabalho autónomo dos alunos, deve perceber que diferentes estratégias são utilizadas por estes, quer sejam estas válidas ou não para que posteriormente saiba quais delas devem ser apresentadas e discutidas com toda a turma. A resolução de problemas implica que os alunos explorem os seus conhecimentos matemáticos para encontrar a solução, constituindo um "importante meio pelo qual os alunos aprendem matemática" (NCTM, 2008, p. 57) e uma "parte significativa do pensamento matemático" (Schoenfeld, 1996, p. 8).

## 3.4. Tarefas propostas[1]

Ao longo da unidade didática houve um trabalho conjunto, com a minha colega de estágio quer na elaboração dos planos de aulas, quer na elaboração das tarefas utilizadas. Esta colaboração foi muito importante pois as aulas foram pensadas tendo em conta todos os objetivos específicos associados aos subtópicos que estavam a ser lecionados, bem como as capacidades transversais necessárias em cada um deles e também os conhecimentos prévios dos alunos. Foi tido também em consideração os recursos que estavam disponíveis na escola, tendo em conta o que pretendíamos com cada aula e tarefas.

Embora o meu estudo se centre na segunda subunidade didática, no que diz respeito à função derivada e à relação que se estabelece entre esta e a função original, a unidade didática foi pensada como um todo, nomeadamente nas tarefas que os alunos realizaram. Ao todo foram desenvolvidas quatro tarefas que são intituladas de "Estância de Ski", "Continuando na Estância de Ski", "Derivando ponto a ponto" e "Evolução das bactérias" e quatro fichas de trabalho que são numeradas de 1 a 4 (ver Anexo 2). Devo, ainda, referir que a ficha de trabalho n.º 4 (Anexo 2.8.) foi elaborada pela minha colega de estágio, enquanto as fichas de trabalho nº 2 e 3 (Anexos 2.6 e 2.7) foram elaboradas por mim. Estas tarefas e fichas de trabalho, juntamente com tarefas e exercícios do manual escolar serviram de base para a minha intervenção letiva.

[1] Ao longo desta secção serão apresentados os principais conceitos matemáticos presentes na unidade didática. Estes conceitos tiveram como referências os livros: Fundamentos da Análise Infinitesimal de Mário Figueira e Compêndio de Álgebra – 1º tomo de Silva e Paulo. As referências completas destes livros podem ser consultadas nas Referências.

### 3.4.1. Tarefa “Estância de Ski”

A tarefa “Estância de Ski” (Anexo 2.1.) deu início à unidade didática, pois foi proposta na primeira aula lecionada. Sendo esta uma tarefa de exploração, e com recurso ao GeoGebra, tinha como objetivo os alunos compreenderem o conceito de taxa média de variação, nomeadamente o significado da sua expressão, a relação que se estabelece entre o sinal da taxa média de variação num determinado intervalo e a monotonia da função nesse intervalo, bem como o seu significado geométrico.

Na primeira parte da tarefa, no que diz respeito à primeira questão pretendia-se que os alunos relembrassem o estudo de uma função, nomeadamente a sua monotonia e os seus extremos. Desta forma, os alunos teriam que recordar que sendo $f$ uma função e $A$ um subconjunto do domínio de $f$ diz-se que:

- $f$ é uma função crescente em $A$ se $f(a) > f(b)$ para cada $a$, $b \in A$ tal que $a > b$
- $f$ é uma função decrescente em $A$ se $f(a) < f(b)$ para cada $a$, $b \in A$ tal que $a > b$
- $f$ é uma função crescente em sentido lato em $A$ se $f(a) \geq f(b)$ para cada $a$, $b \in A$ tal que $a > b$
- $f$ é uma função decrescente em sentido lato em $A$ se $f(a) \leq f(b)$ para cada $a$, $b \in A$ tal que $a > b$

A função $f$ diz-se monótona em $A$ se for crescente ou se for decrescente em $A$.

Relativamente aos extremos de uma função $f$, de domínio $D$, diz-se que:

- $f(a)$ é máximo absoluto de $f$ se $f(a) \geq f(x)$, $\forall x \in D$;
- $f(a)$ é mínimo absoluto de $f$ se $f(a) \leq f(x)$, $\forall x \in D$;
- $f(a)$ é máximo relativo de $f$ se existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ (intervalo aberto centrado em $a$) tal que $f(a) \geq f(x)$, $\forall x \in \mathcal{V} \cap D$;
- $f(a)$ é mínimo relativo de $f$ se existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ (intervalo aberto centrado em $a$) tal que $f(a) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathcal{V} \cap D$.

Além disso, esta primeira questão também exigia que os alunos tivessem um espírito crítico relativamente ao domínio da função. Esta função, cuja expressão algébrica é dada por $f(t) = 0{,}5t^2 - 4t$, representa a variação de temperatura numa estância de ski entre as 0 horas e as 8 horas de um certo dia, pelo que, quando a representamos graficamente, temos de ter atenção ao seu domínio, ou seja, o intervalo $[0,8]$.

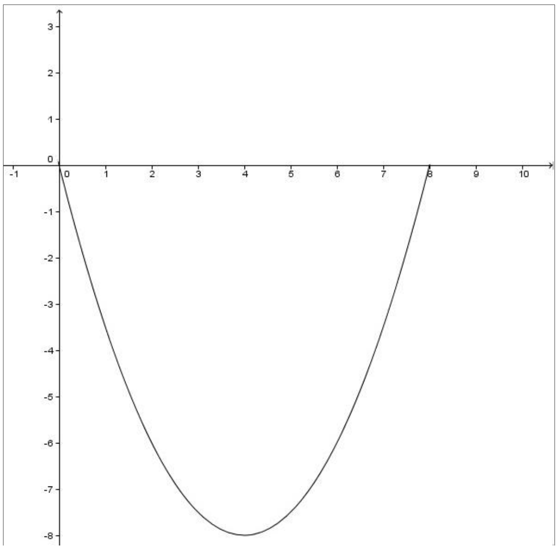


**Figura 6 - Representação gráfica da função $f(t) = 0,5t^2 - 4t$ que traduz a variação de temperatura entre as 0h e as 8h**

Na segunda questão, que se encontra dividida em três alíneas, o objetivo seria ilustrar o conceito de taxa média de variação de uma função, num determinado intervalo. Chama-se taxa média de variação de uma função $f$ num intervalo $[a, b]$ ao quociente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Escreve-se habitualmente

$$t.m.v._{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometricamente, a taxa média de variação é o declive da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Através da segunda alínea desta questão, *Qual a variação média da temperatura entre as 4 horas e as 6 horas?* pretendia-se que os alunos ficassem com a ideia de como se calcula a taxa média de variação da função no intervalo entre as quatro e as seis horas. Para responderem a esta questão poderiam pensar, em primeiro lugar, no significado de variação média da temperatura: como a função $f$ representa a variação de temperatura ao longo de oito horas, para determinar a variação de temperatura entre as quatro horas e as seis horas é natural calcular $f(6) - f(4) = -6 - (-8) = 2$ que significa que entre as quatro e as seis horas verificou-se um aumento de temperatura, dois graus Celsius. Em seguida, teriam de pensar no significado de variação média da temperatura, ou seja, a variação de temperatura em cada hora: $\frac{f(6)-f(4)}{6-4} = \frac{2}{2} = 1$. Assim, a variação média de temperatura entre as quatro e as seis horas é dada por $\frac{f(6)-f(4)}{6-4}$ e é igual a um grau Celsius. Este quociente é a taxa média de variação da função $f$ no intervalo $[4{,}6]$ e representa-se por $t.m.v._{[4,6]}$.

Na terceira questão da primeira parte da tarefa, constituída por três alíneas, o objetivo seria que os alunos conjeturassem uma relação entre o sinal da taxa média de variação e a monotonia da função, num determinado intervalo. Para isso, teriam que calcular a taxa média de variação em determinados intervalos e estudar a monotonia da função nesses mesmos intervalos.

Na segunda parte da tarefa, o objetivo seria que os alunos estudassem a taxa média de variação geometricamente. Desta forma, foram construídas três alíneas em que os alunos tinham de criar pontos, determinar as retas que passavam por cada par de pontos e relacionar o declive de cada uma dessas retas com a taxa média da função no intervalo correspondente.

Na figura seguinte (Figura 7) ilustra-se o significado geométrico da taxa média de variação no intervalo $[4\,,6]$ e como podemos ver pela figura, geometricamente, o quociente $\frac{f(6)-f(4)}{6-4}$ é naturalmente o declive da reta secante que passa nos pontos $(4, f(4))$ e $(6, f(6))$.

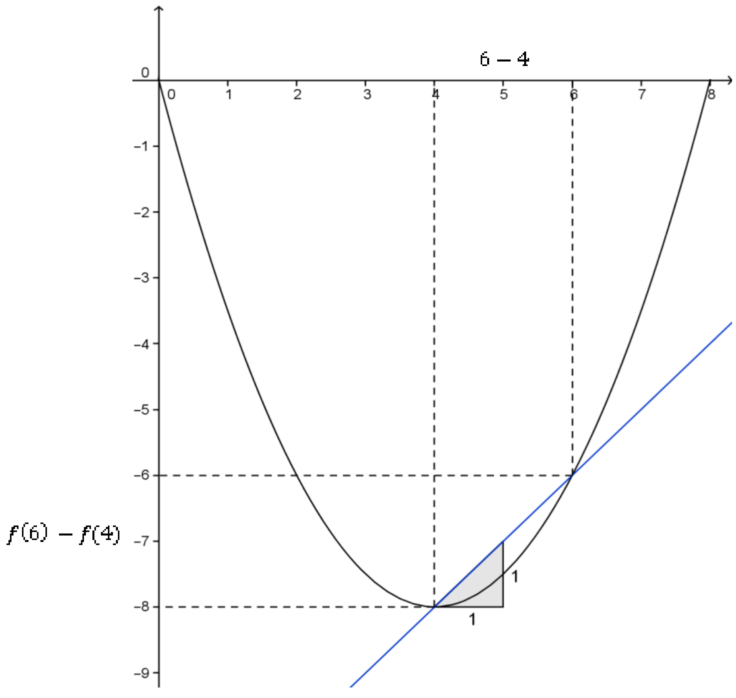



**Figura 7 - Significado geométrico da taxa média de variação da função $f$ no intervalo [4,6]**

Desta forma, geometricamente a taxa média de variação de uma função num determinado intervalo é o declive da reta secante à função que passa pelos pontos cujas abcissas são os extremos desse intervalo. O conceito de taxa média de variação vai ser determinante para a compreensão dos conceitos abordados posteriormente, nomeadamente o de taxa de variação.

### 3.4.2. Tarefa "Continuando na Estância de Ski"

Esta tarefa (Anexo 2.2.), também ela de exploração com recurso ao GeoGebra, tinha como principal objetivo que os alunos explorassem o conceito de taxa de variação, tanto a sua definição como a interpretação geométrica. Esta é constituída por duas partes, cada uma delas com uma questão, que por sua vez está dividida por várias alíneas. Devo referir que houve o cuidado de manter a mesma função trabalhada na tarefa "Estância de Ski" para que houvesse uma continuidade no estudo desta função.

Na primeira parte da tarefa, as várias alíneas da questão, levam os alunos a calcular diversas taxas médias de variação em intervalos com amplitudes cada vez menores para que pudessem perceber como esse facto poderia afetar o valor determinado. A tabela seguinte (Tabela 2) mostra alguns valores que poderiam ter sido calculados pelos alunos.

| $[a,b]$ | $t.m.v._{[a,b]}$ |
|---|---|
| $[5,6]$ | $1,5$ |
| $[5,5.1]$ | $1,05$ |
| $[5,5.01]$ | $1,005$ |
| $[5,5.001]$ | $1,0005$ |

**Tabela 2 - Cálculo da taxa média de variação**

Na última alínea os alunos teriam que conjeturar para que valor tenderia a taxa média de variação consoante a diminuição da amplitude dos intervalos.

Como podemos ver pela tabela anterior (Tabela 2), quando a amplitude do intervalo se torna cada vez menor, ou seja, quando nos aproximamos do ponto de abcissa $5$, a taxa média de variação aproxima-se do valor $1$. Dito de outra forma, quando a diferença *h* entre os extremos do intervalo se aproxima de zero a taxa média de variação aproxima-se do valor 1. Assim,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = 1$$

Ao limite anterior chamamos taxa de variação ou derivada da função no ponto de abcissa $5$ e representamos por $f'(5)$.

Mais geralmente, a taxa de variação ou derivada de uma função $f$ no ponto de abcissa $x_0$ é dada por

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Mais uma vez, o objetivo com estas alíneas seria que os alunos, tendo em conta o contexto da função que tinham em mãos, compreendessem um novo conceito, taxa de variação de uma função e, além disso, a forma como este estava relacionado com o conceito abordado anteriormente. Depois desta alínea seria apresentada aos alunos a definição de taxa de variação referida acima.

Na segunda parte da tarefa, de forma semelhante ao que foi feito na tarefa “Estância de Ski”, os alunos teriam que criar determinados pontos e construir as retas que passavam por cada par de pontos. Mais uma vez, estes pontos e retas estavam relacionados com os extremos dos intervalos considerados na primeira parte da tarefa, e os alunos teriam que relacionar os valores da taxa média de variação, determinados anteriormente, com o declive das retas que construíram. Para esta questão foi ainda pensada a criação de um seletor no GeoGebra que permitisse aos alunos formar sucessivas retas cujos pontos que as definiam ficavam cada vez mais perto, apenas movendo este seletor. A existência deste seletor tinha como objetivo os alunos compreenderem um pouco melhor como é que geometricamente a ideia de limite funciona.

A figura seguinte (Figura 8) faz esse estudo mostrando as sucessivas retas secantes ao gráfico da função $f$, que os alunos poderiam determinar e cujos declives são as taxas médias de variação nos intervalos da tabela.

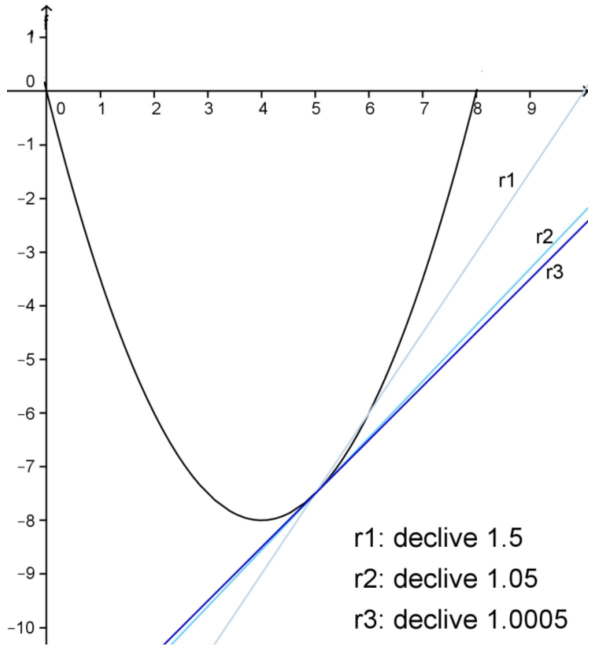



**Figura 8 - Taxa média de variação em intervalos com amplitude cada vez menor**

Esta figura (Figura 8) mostra que as sucessivas retas secantes estão a aproximar-se da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $5$, que terá o declive igual ao limite calculado anteriormente (ver Figura 9).

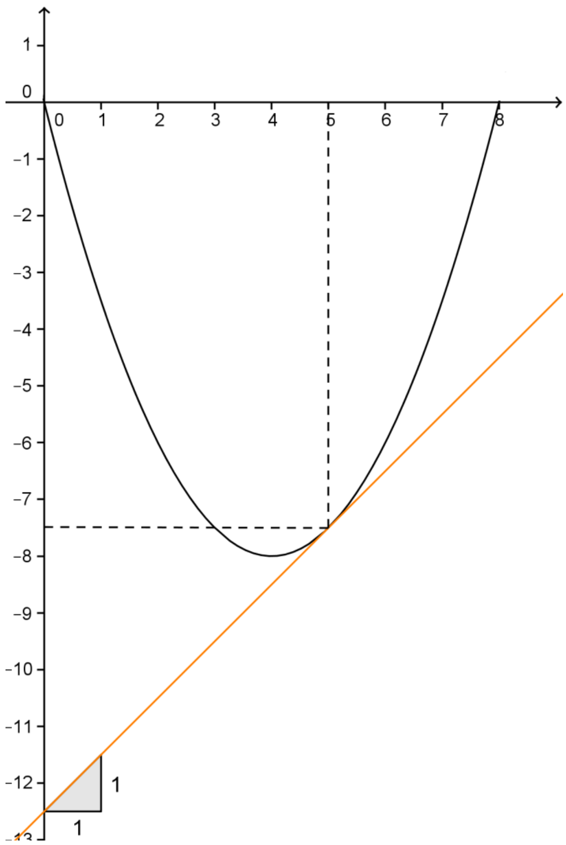


**Figura 9 - Significado geométrico da taxa de variação**

Assim, geometricamente a taxa de variação ou derivada da função no ponto de abcissa 5 é o declive da reta tangente ao gráfico da função neste ponto.

Esta tarefa tem uma importância muito grande para o estudo, pois é nela que é definida a derivada num ponto, conceito determinante para o sucesso de toda a unidade didática.

### 3.4.3. Tarefa "Derivando ponto a ponto"

A tarefa "Derivando ponto a ponto" (Anexo 2.3.) é constituída por uma questão, dividida em quatro alíneas. Trata-se de uma tarefa de exploração para ser trabalhada com recurso às capacidades da calculadora gráfica. O principal objetivo desta tarefa era que os alunos chegassem ao conceito de função derivada.

A própria escolha da função desta tarefa, $f(x) = x^2$, prende-se com o facto de ser uma função muito conhecida dos alunos, já trabalhada em anos anteriores, uma vez que o objetivo desta tarefa não era estudar a função mas sim outros conceitos com ela relacionados, nomeadamente o declive de retas tangentes ao seu gráfico.

Na primeira alínea, depois de os alunos terem representado graficamente a função, teriam de fixar uma determinada abcissa do domínio da função, com o recurso à calculadora. Esta abcissa seria necessária para a segunda alínea, onde os alunos teriam, mais uma vez com as capacidades da calculadora gráfica, determinar a reta tangente ao gráfico da função naquela abcissa fixada e registar o seu declive.

Na terceira alínea, este processo descrito anteriormente teria que ser repetido e os alunos, mais uma vez, teriam que registar, tendo em conta a abcissa escolhida, o declive da reta tangente ao gráfico nesse ponto.

Na quarta alínea, os alunos teriam que encontrar uma expressão analítica para os valores encontrados anteriormente. É com esta alínea e com a anterior que os alunos teriam de determinar a expressão para a função derivada, embora ainda não o soubessem neste momento.

O objetivo destas alíneas era que os alunos compreendessem que a cada valor do domínio da função, poderia ser associado um outro valor, que neste caso era o declive da reta tangente, que eles anteriormente já sabiam que representava geometricamente a derivada nesse ponto. Com esta tarefa, os alunos ficariam a saber que é possível expressar o valor da derivada para cada valor do domínio da função, onde existe derivada através de uma nova função, a função derivada.

Após a discussão desta tarefa, seria definido o conceito de função derivada, como segue:

Seja $f$ uma função, e $D$ o conjunto de todos os elementos do domínio de $f$ onde existe derivada finita. Chama-se função derivada de $f$ à função de domínio $D$ que a cada $x$ faz corresponder a derivada de *f* em $x$ , $f'(x)$.

### 3.4.4. Ficha de trabalho nº 1

Esta ficha de trabalho (2.4.) é constituída por oito questões. Algumas destas questões são apenas exercícios de aplicação, enquanto outras envolvem algumas conexões com os conceitos abordados até à data da sua realização. As oito questões têm também diferentes objetivos, como conhecer a definição de derivada num ponto, o seu significado geométrico, a aplicação das regras de derivação, determinação da equação reduzida de uma reta tangente a um gráfico de uma função e identificar pontos onde não existe derivada.

No que diz respeito às regras de derivação, a questão 2 desta ficha de trabalho faz uma síntese de todas as funções de que os alunos têm de saber determinar a expressão algébrica da sua função derivada, ou seja, função afim, função polinomial do segundo e terceiro graus e função racional do primeiro grau.

Para determinar a expressão algébrica da função derivada de uma função afim, isto é, uma função $f$ definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = ax + b$, com $a$ e $b$ constantes, é importante que os alunos compreendam que o podem fazer através da definição de derivada num ponto. Considerando $x_0$ um valor real qualquer,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(x_0 + h) + b - (ax_0 + b)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{ax_0 + ah + b - ax_0 - b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a$$

Desta forma, podemos dizer que a função derivada de uma função afim é o coeficiente $a$ do termo em $x$, ou seja, o declive da reta representativa da função. Concluindo temos que

$$f'(x) = (ax + b)' = a$$

Em particular, na expressão $ax + b$ podemos ter $a = 0$. Desta forma ficamos com uma função constante $f(x) = b$. Logo a sua derivada será $0$. Assim, a derivada de uma constante é zero,

$$f'(x) = (b)' = 0$$

Também com esta tarefa é importante que os alunos reconheçam uma regra relativa à derivada de uma soma. A derivada da soma de duas ou mais funções é sempre igual à soma das derivadas das funções dadas (onde estas tiverem derivada finita). A prova deste resultado é muito simples e resulta de uma das propriedades dos limites: o limite de uma soma é a soma dos limites.

A partir do momento que os alunos reconhecem esta regra, para determinar a expressão algébrica da derivada de uma função polinomial do segundo grau, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a$, $b$ e $c$ constantes podem simplesmente determinar a derivada de $g(x) = ax^2$, pois a derivada de $bx + c$ já é conhecida, ou seja, $b$. Mais uma vez, para determinar a derivada de $g(x) = ax^2$, os alunos podem recorrer à definição de derivada num ponto, considerando $x_0$ um valor real qualquer,

$$\begin{aligned} g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{a(x_0 + h)^2 - a{x_0}^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a({x_0}^2 + 2hx_0 + h^2) - a{x_0}^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a{x_0}^2 + 2ahx_0 + ah^2 - a{x_0}^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2ax_0 + h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2ax_0 + h) = 2ax_0 \end{aligned}$$

Portanto a derivada de uma função polinomial do segundo grau é dada por:

$$f'(x) = (ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$$

De forma análoga para a função polinomial de terceiro grau os alunos podem determinar a sua função derivada recorrendo à definição de derivada para determinar a derivada de $ax^3$, que é $3ax^2$. Assim, a derivada de uma função polinomial de 3.º grau é dada por:

$$f'(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)' = 3ax^2 + bx + c$$

Por último os alunos têm de saber determinar a expressão algébrica da função derivada de uma função racional do primeiro grau, do tipo $f(x) = c + \frac{a}{x-b}$ e, mais uma vez, podem recorrer, em primeiro lugar à regra da derivada da soma, pois já deveriam reconhecer que a derivada de uma constante é zero. Posteriormente, como os alunos já estudaram anteriormente à unidade didática lecionada as funções racionais podem socorrer-se desse estudo e verificarem que dada a função $h(x) = \frac{a}{x}$ , o gráfico desta obtém-se a partir do gráfico de $g(x) = \frac{a}{x-b}$ pela translação associada ao vetor $(b, 0)$. Depois desta verificação pode concluir-se que $g'(x) = h'(x-b)$ e portanto os alunos podem recorrer à definição de derivada num ponto, considerando $x_0$ um valor real qualquer, para determinar a derivada de $h(x) = \frac{a}{x}$

$$h'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{a}{x_0+h} - \frac{a}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-ah}{x_0(x_0+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-ah}{h({x_0}^2 + x_0 h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-a}{{x_0}^2 + x_0 h}$$
$$= \frac{-a}{{x_0}^2}$$

Portanto a derivada da função $h(x) = \frac{a}{x}$ é dada por $-\frac{a}{x^2}$ e pode concluir-se que $g'(x) = h'(x-b) = -\frac{a}{(x-b)^2}$.

Voltando à função $f$, os alunos podem concluir que a derivada de uma função racional do primeiro grau é dada por:

$$f'(x) = \left(c + \frac{a}{x-b}\right)' = \frac{-a}{(x-b)^2}$$

Voltando à ficha de trabalho é de ressaltar a oitava questão que está dividida em duas alíneas. A primeira tem como objetivo os alunos saberem determinar quando uma função é diferenciável num determinado ponto. Nesta alínea está em causa a identificação de pontos angulosos de uma função, isto é, os pontos onde não é possível traçar uma tangente ao seu gráfico. Na segunda alínea desta questão, os alunos, a partir da representação gráfica de uma função, têm de determinar a derivada num determinado ponto. Mais uma vez, está em causa a interpretação geométrica da derivada num determinado ponto.

Esta ficha de trabalho foi concebida para que os alunos trabalhassem os conceitos abordados até ao momento, relacionando-os entre si, e para que fosse possível verificar se existiam dúvidas relativas aos mesmos. Além disso, é muito importante para o meu estudo, pois estão presentes determinados conceitos determinantes para o mesmo, nomeadamente, função derivada e pontos angulosos.

### 3.4.5. Tarefa "Evolução das Bactérias"

Esta tarefa (Anexo 2.5.) é constituída por cinco questões e tem como principal objetivo conduzir os alunos ao estabelecimento da relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos da função original.

Nesta tarefa é apresentada aos alunos a representação gráfica de uma função que descreve a evolução do número de bactérias ao longo de uma experiência que durou cinco horas e 30 minutos. Com esta representação gráfica, na primeira questão, os alunos têm de fazer um estudo sobre esta função, nomeadamente a sua monotonia, bem como o sinal do declive das retas tangentes ao gráfico da função e o sinal da derivada em determinados intervalos. A segunda questão tinha como principal objetivo os alunos determinarem o valor da função derivada nos extremos da função original, apenas a partir da sua representação gráfica, relembrando o significado geométrico de derivada num ponto.

Com estas duas questões termina o estudo da função a partir da sua representação gráfica e, na questão seguinte, a terceira, é dado aos alunos a expressão analítica que define a função e é-lhes pedido, em primeiro lugar, que determinem a sua função derivada (3.1.) e que posteriormente (3.2.) estudem o sinal da função derivada determinada anteriormente. Estas duas alíneas têm como objetivo, em primeiro lugar, os alunos determinarem uma função derivada, usando as regras de derivação já abordadas, e estudar o sinal da função derivada, recordando o estudo do sinal de uma função, também já abordado anteriormente.

As duas questões seguintes, quarta e quinta, têm como objetivo os alunos relacionarem os valores encontrados nas duas primeiras questões da tarefa com a terceira, relacionando o sinal da função derivada com o sentido de variação da função original e, posteriormente, fazendo uma conjetura sobre a relação entre os zeros da função derivada com os extremos da função original.

Com esta tarefa pretende-se que os alunos compreendam que existe uma relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação da função original, ao verificarem que quando a derivada tem sinal negativo a função é decrescente e quando a primeira tem sinal positivo a segunda é crescente.

- Se uma função tem derivada positiva em todos os pontos de um intervalo, a função é crescente nesse intervalo.
- Se uma função tem derivada negativa em todos os pontos de um intervalo, a função é decrescente nesse intervalo.
- Se uma função tem derivada nula em todos os pontos de um intervalo, a função é constante nesse intervalo.

Assim, no caso de uma função ter derivada finita em todos os pontos de um intervalo, para estudar a sua monotonia e a existência de extremos podemos procurar os pontos $x$ em que a derivada é nula. Esses pontos, nos casos usuais, separam intervalos em que a função é monótona. Podemos então, organizar a informação de que dispomos num quadro, onde numa linha indicamos os sinais da função derivada, tendo em conta os diferentes intervalos considerados e noutra, em correspondência, o sentido de variação da função original, utilizando o sinal de ↗ quando a função é crescente, o sinal de ↘ quando a função é decrescente e o sinal de → quando a função é constante. Da relação dos extremos com o sentido de variação da função, resulta então que:

- Ponto em que a derivada de $f(x)$ mude de sinal, passando de positiva a negativa, é ponto máximo relativo de $f(x)$ (supondo esta função contínua nesse ponto).
- Ponto em que a derivada de $f(x)$ mude de sinal, passando de negativa a positiva, é ponto de mínimo relativo de $f(x)$ (supondo esta função contínua nesse ponto).

Esta tarefa é muito importante para este estudo, pois trata da relação que se estabelece entre a função derivada e função original, e permite os alunos explorarem esta relação tanto analítica como graficamente.

### 3.4.6. Ficha de trabalho nº 2

A ficha de trabalho nº 2 (Anexo 2.6.) é constituída por cinco questões e diz respeito à relação entre o sinal da função derivada e monotonia e extremos relativos de uma função.

A primeira questão tem como objetivo os alunos, analiticamente, estudarem a variação da monotonia e os extremos de três funções distintas. A primeira função é uma função polinomial, a segunda uma função racional do primeiro grau e a terceira uma função módulo. Estas foram as funções escolhidas pois abordavam questões diferentes como o facto de a função derivada não ter zeros e também não estar definida em determinados pontos.

A segunda e quarta questões consistem em problemas de otimização. Estas questões estão presentes nesta ficha de trabalho, pois é necessário que os alunos trabalhem os conceitos matemáticos com contextos e compreendam a utilidade dos mesmos.

A terceira e quinta questões têm como principal objetivo os alunos estabelecerem a relação entre a função derivada e função original a partir de representações gráficas das funções.

Esta ficha de trabalho é relevante para o estudo, pois em todas as questões está presente a relação entre o sinal da função derivada e a monotonia e extremos da função original, nas diferentes representações, analítica e gráfica.

### 3.4.7. Ficha de trabalho nº 3

Esta ficha de trabalho nº 3 (Anexo 2.7.) é constituída por seis questões, onde algumas são de escolha múltipla enquanto outras são de resposta aberta. Estas questões dizem respeito, mais uma vez, à relação que se estabelece entre o sinal da função derivada e a monotonia e existência de extremos da função original. Globalmente, esta ficha de trabalho tem como objetivo os alunos estudarem a função derivada a partir da função original e reciprocamente, a partir tanto de uma expressão algébrica como de uma representação gráfica.

Devo referir que na quinta questão é pedido aos alunos que recorram à calculadora gráfica, pois o que se pretende é que estes determinem quais os pontos onde não existe derivada, pelo que a representação gráfica da função, fornecida pela calculadora gráfica é facilitadora para a resolução desta questão.

Esta ficha de trabalho contribui para o estudo, pois, mais uma vez, em todas as questões está presente a relação entre o sinal da função derivada e a monotonia e extremos da função original, nas diferentes representações, algébrica e gráfica e, além disso, aborda o conceito de pontos angulosos.

### 3.4.8. Ficha de trabalho nº 4

Esta ficha de trabalho (Anexo 2.8.) é constituída por seis questões, onde é abordada a relação entre a função derivada e a função original, a partir de problemas com contexto relacionados com a determinação de extremos, ou seja, problemas de otimização.

Algumas destas questões são constituídas por alíneas que contextualizam cada uma das situações e têm como objetivo os alunos relembrarem o estudo de funções, nomeadamente, o domínio, o estudo da existência de assintotas, zeros de funções, entre outros.

As alíneas ou questões que dizem respeito aos problemas de otimização têm características distintas, onde algumas delas estão equacionadas, enquanto outras serão os alunos que terão de equacionar. Além disso, nalgumas destas está indicado se devem ser resolvidas com recurso à calculadora gráfica, nomeadamente a terceira questão. De ressaltar que em todas as outras questões não é indicado aos alunos a forma como estes poderão resolver os problemas, sendo um dos objetivos perceber de que forma estes os abordam.

## 3.5. Avaliação das aprendizagens

A definição e objetivos da avaliação nem sempre foram os mesmos ao longo da história da escola, devido à evolução do próprio conceito de escola e a quem se dirigia e também ao contexto em que estava inserida. É certo que a avaliação nos sistemas de ensino já sofreu muitas alterações e para que hoje se estipule que um professor utilize a avaliação como elemento regulador e promotor da qualidade do ensino, da aprendizagem e da sua própria formação (DL 240/2001, 30 de agosto), várias investigações (Fernandes, 2013; NCTM, 2008; Pinto & Santos, 2006) acabaram por mostrar que a avaliação não pode estar separada de todo o processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Para que não haja essa separação uma das recomendações é que os alunos devem participar ativamente na construção das suas aprendizagens (Fernandes, 2011) e, consequentemente, ter um papel ativo nas suas avaliações.

Desta forma, a avaliação das aprendizagens dos alunos deve constituir uma prática regular da atividade de um professor, que o informa e orienta nas suas decisões (NCTM, 2008). Assim, avaliar os conhecimentos matemáticos dos alunos significa reunir e analisar dados sobre o que estes sabem a respeito de conceitos e métodos matemáticos e não deve restringir-se a avaliar o produto final mas também o processo de aprendizagem (ME, 2001).

Segundo o Programa do Ensino Secundário (2001), o professor não deve reduzir as suas formas de avaliação aos testes escritos, mas antes diversificá-las. Uma vez que os alunos mostram aquilo que sabem e conseguem fazer de diferentes maneiras, a avaliação deverá permitir abordagens múltiplas, resultando no aprofundamento das informações sobre cada aluno e permitindo que cada um mostre os seus pontos fortes (NCTM, 2008).

Nas aulas que lecionei a componente de avaliação das aprendizagens dos alunos esteve presente de duas formas distintas. Uma destas componentes foi um teste de avaliação sumativa, no dia 6 de março (Anexo 3.1.), onde constava uma questão de escolha múltipla e uma questão de resposta aberta, ambas sobre o cálculo e interpretação geométrica da taxa média de variação e taxa de variação. Devo salientar que para a questão de resposta aberta, foi apenas pedido aos alunos para justificarem todo o seu raciocínio, não sendo explícito que método estes poderiam recorrer para resolver a questão. Ainda referente a esta componente da avaliação, foi realizado um segundo teste de avaliação sumativa, no 3.º Período, no dia 24 de abril (Anexo 3.2.), mais uma vez onde constava uma questão de escolha múltipla e uma de resposta aberta. No caso destas questões, a primeira, diz respeito à relação entre a função derivada e a função original, onde é pedido aos alunos que tirem conclusões sobre a monotonia e a existência de extremos da função original a partir da sua função derivada, que se trata de uma função afim. Na questão de resposta aberta, que é constituída por várias alíneas, esta centra-se não só na relação entre a função derivada e a função original, mas como a interpretação geométrica da derivada num determinado ponto, onde é pedido aos alunos a determinação de uma equação da reta tangente ao gráfico da função num determinado ponto.

Outra das componentes de avaliação diz respeito às intervenções dos alunos durante as aulas. Tratando-se de um dos critérios de avaliação definidos desde o início do ano letivo faria todo o sentido avaliar os alunos desta forma, pois através da observação do seu comportamento e reações ao longo da unidade didática, dos seus comentários e das suas respostas quando questionados por mim, tornaram-se momentos muito ricos e diversificados de avaliação dos alunos.

## 3.6. Sínteses das aulas realizadas

### 3.6.1. 1.ª Aula (13h35-15h05) – 24 de Fevereiro de 2015

(O plano para esta aula pode ser consultado no Anexo 1.1.)

A aula iniciou-se normalmente, pois os alunos já sabiam que seria eu a dar a aula, mas com algum atraso, possivelmente por se tratar de uma aula imediatamente a seguir à hora de almoço. Como para esta primeira aula estava prevista a realização, em pares, da tarefa “Estância de Ski” (Anexo 2.1.) com o recurso ao *software* GeoGebra tinha pedido anteriormente aos alunos, para quem pudesse trouxesse o computador portátil para esta aula. Devido a não ter uma garantia de quem traria ou não computadores portáteis foram requisitados alguns computadores da escola, mas devido ao atraso inicial dos alunos, houve uma demora a ligar os computadores para estarem prontos para se iniciar a tarefa.

Foi interessante perceber que os alunos aderiram bem à tarefa, mostrando vontade em aprender a manusear o recurso para dar resposta às questões colocadas na mesma. O trabalho autónomo dos alunos na resolução da Parte I da tarefa demorou um pouco mais do que estava previsto, embora não tenham surgido muitas dificuldades ou dúvidas naquilo que era pedido. Esta demora, possivelmente, poderá estar relacionada com o facto da maioria dos alunos nunca antes ter usado o recurso GeoGebra e além disso, por terem realizado muitos cálculos manualmente, que poderiam ter feito mais rapidamente com o recurso. Mesmo com a minha chamada de atenção alguns alunos resistiram em utilizar o recurso para efetuar cálculos ou utilizavam-no para confirmar cálculos que já tinham realizado.

Devido a esta demora a realizar a Parte I da tarefa, decidi fazer a discussão da mesma oralmente, ou seja, os alunos não foram ao quadro mas responderam quando solicitados e os colegas iam colocando questões. Devo referir que a questão 3.(c) foi a que levantou algumas dificuldades devido ao terceiro intervalo em que a função, nesse mesmo intervalo, não era apenas crescente ou decrescente. Com a discussão, considero que os alunos que ainda poderiam ter alguma dificuldade na relação entre o sinal da taxa média de variação num intervalo e a monotonia da função nesse intervalo, conseguiram compreender qual era a implicação desejada, e que portanto não poderiam tirar conclusões sobre a monotonia da função num determinado intervalo a partir do sinal da taxa média de variação. O atraso verificado impossibilitou a realização da Parte II da tarefa tal como tinha sido inicialmente planeado.

De uma forma geral a aula foi bem-sucedida e os alunos pelo seu desempenho durante a aula e a sua participação e respostas durante a discussão, evidenciaram ter realizado aprendizagens significativas. Embora seja uma turma pequena, os alunos têm ritmos de trabalho diferentes e como previa alguns pares acabaram mais rapidamente a Parte I da tarefa e por isso foi-lhes proposto um exercício do manual escolar.

Em síntese, a planificação não foi cumprida e uma das razões que o poderá explicar, mais uma vez, foi a demora a iniciar a aula pois os computadores não estavam prontos a utilizar, por não se saber quantos alunos trariam também os seus computadores. A Parte I da tarefa, devido à sua extensão, demorou um pouco mais a ser resolvida do que estava previsto, o que poderá ter sido mais um fator para este atraso.

### 3.6.2. 2.ª Aula (10h05-11h35) – 26 de Fevereiro de 2015

(O plano para esta aula pode ser consultado no Anexo 1.2.)

A aula iniciou-se normalmente, e depois de ditado o sumário, os alunos começaram a resolver a Parte II da Tarefa “Estância de Ski” (Anexo 2.1.). Mais uma vez os alunos trabalharam bem com o GeoGebra e rapidamente conseguiram compreender o que representa geometricamente a taxa média de variação.

A discussão desta parte da tarefa foi idêntica à da aula anterior, com os alunos a responderem às questões oralmente, não havendo grandes dificuldades. Devo referir que ainda na sistematização dos resultados, depois de questionados sobre o que representava geometricamente a taxa média de variação, houve uma aluna que rapidamente disse que o cálculo da taxa média de variação num determinado intervalo era igual ao cálculo do declive da reta que passa pelos pontos de abcissa que correspondem aos extremos desse mesmo intervalo. De uma forma geral, posso dizer que os alunos compreenderam o que representa geometricamente a taxa média de variação.

De seguida foi entregue a Parte I da Tarefa “Continuando na Estância de Ski” (Anexo 2.2.) que os alunos resolveram autonomamente, com os pares formados anteriormente. Durante o trabalho autónomo a maioria dos grupos trabalharam bem, mas há que salientar dois grupos que se atrasaram um pouco mais. Este atraso pode ser devido a algum desinteresse pelo trabalho com o recurso pois já não havia o “fator surpresa” de estar a trabalhar com um computador e com o GeoGebra e também por estes alunos terem algumas dificuldades da disciplina de Matemática.

Tenho de referir algumas dúvidas e dificuldades dos alunos na questão 1.(b) pois não olharam para a segunda coluna da tabela como um intervalo, mas sim como um número $5{,}5 + h$. Devido a esta confusão, os alunos tiveram dificuldades na escolha dos valores de $h$, pois não compreenderam de imediato o que se pretendia com aquela questão. Talvez devido a esta dúvida o trabalho a desenvolver nesta alínea foi mais demorado do que o previsto. Para evitar esta situação poderia ter sido feita, no início da tarefa, uma leitura do enunciado. Depois de ultrapassada esta dificuldade, a maioria dos alunos conseguiu terminar esta parte da tarefa e chegar à conclusão de que o valor da taxa média de variação se estava a aproximar do valor $1$.

A discussão desta parte da tarefa foi feita, de novo, oralmente e não houve grandes dificuldades, pois a maioria dos alunos tinha chegado ao pretendido. Relativamente à sistematização dos resultados poderão ter ficado algumas dúvidas pois penso não ter feito da melhor forma “a ponte” entre o que os alunos estavam a fazer na tarefa com o que ia ser definido de seguida. Considero que, de qualquer forma, os alunos compreenderam a definição de derivada/taxa de variação com o cálculo do limite com $h$ a tender para zero. Poderá não ter ficado tão claro que com o cálculo daquele limite se obtém um número real e que no caso particular da tarefa, a derivada em $x = 5$ era precisamente o valor para o qual estava a tender a taxa média de variação quando a amplitude do intervalo diminuía, obtendo-se o valor $1$.

Há que referir também que para os alunos a transformação $h = x - x_0$ não foi fácil de compreender e que a definição de derivada através do limite quando $x$ tende para $x_0$ poderá não ter ficado tão bem compreendida como a anterior. Nas aulas seguintes há a necessidade de esclarecer os alunos sobre esta definição, possivelmente através da resolução de exercícios ou uma explicação para a turma.

A planificação não foi totalmente cumprida pois os alunos não conseguiram concluir a Parte II da Tarefa “Continuando na Estância de Ski”. Para este atraso posso referir as dificuldades referidas em cima, na questão 1.(c), pois os alunos não compreenderam que se tratava de um intervalo, o que levou também a algumas dificuldades, e algum atraso, na escolha dos valores de $h$, que deveriam ser escolhidos cada vez mais pequenos. De forma a ter evitado este atraso, além de poder ter sido feita uma leitura do enunciado da tarefa, poderia ter explicado para que serviria o seletor no ficheiro do GeoGebra e como este funcionava, para a escolha de valores de $h$.

### 3.6.3. 3.ª Aula (13h35-15h05) – 27 de Fevereiro de 2015

(O plano para esta aula pode ser consultado no Anexo 1.3.)

A aula iniciou-se um pouco depois da hora pois a maioria dos alunos chegou um pouco atrasados. Mais uma vez este pequeno atraso pode dever-se à hora da aula, pois se tratar imediatamente a seguir à hora de almoço dos alunos.

Esta aula iniciou-se com a Parte II da Tarefa “Continuando na Estância de Ski” (Anexo 2.2.) que dizia respeito à interpretação geométrica da taxa de variação num determinado ponto. Durante o trabalho autónomo, os alunos tiveram dificuldades no manuseamento do seletor $h$ pois alguns grupos não tinham este seletor com as características que foram definidas no início da tarefa. Possivelmente com o manuseamento do recurso nas aulas anteriores alteraram as definições do seletor, o que condicionou o desenrolar da tarefa e o surgimento de algumas dúvidas.

Depois de ultrapassadas estas dificuldades a maioria dos alunos conseguiu avançar na tarefa e considero que tenham compreendido que a derivada de uma função num determinado ponto representa geometricamente o declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto.

Mais uma vez, devido ao facto de muitos pares não terem o seletor definido corretamente, esta parte da tarefa demorou um pouco mais do que estava previsto e decidi avançar para a discussão dos resultados, embora ainda houvesse um ou dois pares que ainda não tinham respondido totalmente às questões. De qualquer forma, considero que com a apresentação dos resultados e, através da visualização com o projetor, de um ficheiro em GeoGebra, em que mostrava as sucessivas retas que se iriam aproximar de uma reta tangente ao gráfico da função, cujo declive era o limite dos declives dessas mesmas retas, os alunos compreenderam o significado geométrico da taxa de variação num determinado ponto. Foi ainda feita a sistematização dos resultados que não suscitou dificuldades nos alunos.

Depois deste momento foi feita a correção do trabalho de casa sendo apenas corrigido um exercício do manual escolar, pois os alunos apenas mostraram dificuldades num dos exercícios, após terem sido questionados sobre isso. O exercício que não levantou dúvidas aos alunos tratava apenas de aplicar a fórmula para a taxa média de variação num determinado intervalo e, como os alunos conseguiram-no resolver sem dificuldades, mostra que compreenderam a fórmula e conseguem aplicá-la. O segundo exercício levantou algumas dificuldades pois dizia respeito à interpretação geométrica da taxa média de variação. Estas terão surgido pelo facto de os alunos sentirem dificuldades em retirar informação a partir da representação gráfica de funções. Após a apresentação dos resultados deste exercício e depois de relembrado o que representa a taxa média de variação geometricamente, os alunos conseguiram compreender o que estava envolvido no exercício.

Posteriormente à correção do trabalho de casa foi mostrado aos alunos como determinar a equação da reta tangente a um gráfico de uma função, por se tratar da primeira vez que os alunos iriam ver o trabalho com limites. A turma neste momento participou e pela sua participação deu mostras de que a maioria compreendeu os cálculos envolvidos, principalmente no cálculo do declive desta reta. O cálculo do valor $b$ da equação reduzida da reta não levantou dificuldades, tendo os alunos, através do questionamento, respondido corretamente à forma como se procederia para o calcular.

Com este exemplo terminou a aula e foram considerados para trabalho de casa algumas tarefas do manual escolar para que os alunos exercitem os conteúdos abordados até ao momento. Mais uma vez a planificação não foi cumprida, pois não se realizou o momento de trabalho autónomo dos alunos na resolução de exercícios do manual sobre os tópicos lecionados. Este não cumprimento deve-se ao facto de a Parte II ter demorado um pouco mais do que estava previsto, pelo que já foi relatado.

Devido à planificação não ter sido cumprida, não restando tempo para o trabalho autónomo dos alunos, será necessário, antes de avançar nos conteúdos a lecionar que não restem dúvidas relativas ao que foi abordado até ao momento. Desta forma, os resultados das tarefas do manual que foram consideradas trabalho de casa serão apresentados e discutidos na próxima aula. Caso alguma destas não tenha sido realizada pela maioria dos alunos será realizada na próxima aula.

### 3.6.4. 4.ª Aula (10h05-11h35) – 2 de Março de 2015

(O plano para esta aula pode ser consultado no Anexo 1.4.)

Devido à realização de uma prova pelos alunos no dia 3 de março que iria coincidir com a aula de Matemática, esta foi alterada para dia 2 de março.

Esta aula iniciou-se normalmente, e após os alunos passarem para o seu caderno diário o sumário, começou-se por corrigir o trabalho de casa e a resolução de um exercício do manual referente ao cálculo de uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico de uma função.

A opção de iniciar a aula desta forma prende-se com o facto de os alunos ainda não terem tido, até ao momento, oportunidade de trabalharem e aplicarem as noções já abordadas. Considero que esta opção foi acertada, pois os alunos, após terem sido questionados sobre dúvidas ou dificuldades sentidas na resolução dos exercícios do trabalho de casa, alguns responderam que tinham, dizendo que não conseguiram resolver alguns deles. Considero que estas dificuldades eram expectáveis, pois foi a primeira vez que os alunos tiveram de aplicar as definições dos conceitos dados. A partir daqui, acho que a maioria dos alunos compreendeu melhor os conceitos, pois conseguiu de forma mais autónoma resolver o resto dos exercícios e responder mais facilmente às questões colocadas.

Em seguida, para que os alunos autonomamente trabalhassem com a definição de derivada num ponto foi proposto um exercício do manual escolar onde tinham de determinar a equação da reta tangente a um gráfico de uma função. Mais uma vez surgiram algumas dificuldades no trabalho com os limites, nomeadamente na determinação de $f(1+h)$. Esta dificuldade, na minha opinião deve-se ao facto de encontrarem na expressão uma letra "$h$" e terem de "substituir" na função, ou seja, considerarem "$h$" como uma variável não compreendendo que $1+h$ podia e deve ser substituído na função.

Depois de ultrapassadas estas dificuldades os alunos conseguiram avançar nos cálculos pretendidos. Relativamente ainda a este exercício, tenho de referir a dificuldade na escrita da expressão "$\lim_{h\to 0}$ " que muitas vezes era esquecida a meio dos cálculos. Além disso, devo referir também o caso de alguns alunos colocarem sinais de equivalência entre os sucessivos limites. Considero que esta dificuldade se deve à novidade no manuseamento desta nova terminologia, sendo que com algum apoio os alunos rapidamente conseguiram resolver o exercício.

Nestes dois momentos da aula, considero que houve um bom ritmo havendo trabalho realizado por parte dos alunos. No momento seguinte os alunos resolveram autonomamente a Tarefa "Derivando ponto a ponto" (Anexo 2.3.). Os alunos aderiram bem à tarefa havendo apenas algumas dúvidas relativamente ao manuseamento do recurso, no que diz respeito à ordem pela qual teriam de introduzir os dados na calculadora gráfica. Depois de ultrapassadas estas dificuldades resolveram a tarefa rapidamente e chegaram à expressão desejada "$2x$".

De seguida, depois da apresentação e discussão dos resultados, onde não houve dificuldades por parte dos alunos, foi dito a estes que a própria derivada era também uma função e que o seu domínio estava associado ao domínio da função original. Penso que neste momento poderia ter reforçado um pouco mais a importância da função derivada e ter colocado mais questões aos alunos para perceber se estes estavam ou não a compreender este novo conceito.

Depois de projetada a definição de função derivada iniciou-se um momento para mostrar aos alunos a função derivada das funções do tipo $ax^2$. Os alunos oralmente deram a resposta dizendo que a sua derivada iria ser $2ax$ por analogia ao que tinham feito na tarefa anterior. Este facto poderá mostrar que a tarefa foi bem compreendida e revela a confiança dos alunos a responderem imediatamente à questão colocada.

Disse-lhes que seria necessário provar o que eles afirmavam e em interação com eles foi feita a prova através da definição de derivada. Considero que os alunos compreenderam o cálculo feito, pois eram eles que indicavam o passo seguinte do próprio cálculo. Talvez não tenham existido dificuldades neste cálculo, que até seriam expectáveis, pois neste tínhamos em jogo a letra “$h$” e a letra “$x$”, devido a terem realizado anteriormente um cálculo com a definição de derivada.

A planificação para esta aula foi cumprida e considero que, de uma forma geral, os alunos trabalharam bem. Pelo seu comportamento e atitude em aula acho que compreenderam os conceitos abordados.

### 3.6.5. 5.ª Aula (10h05-11h35) – 5 de Março de 2015

(O plano para esta aula pode ser consultado no Anexo 1.5.)

Nesta aula dispunha de apenas 45 minutos, pois a segunda metade da aula estava reservada para o esclarecimento de dúvidas para o teste de avaliação que seria realizado na aula seguinte. A opção para esta aula foi tentar concluir as funções derivadas e deixar os exercícios de aplicação para trabalho de casa ou para os alunos que não tivessem dúvidas para o teste de avaliação. Como os alunos já tinham visto a prova de uma das funções polinomiais de 2.º grau, decidi para as seguintes apenas indicar qual seria a sua função derivada, pois pelo que a turma já tinha mostrado ao longo das últimas aulas, sabia que iriam acompanhar o que iria ser abordado.

Os alunos estiveram atentos e iam interagindo respondendo às minhas questões, nomeadamente na determinação da função derivada de alguns exemplos de funções polinomiais de 2.º grau e 3.º grau. Rapidamente os alunos captaram a lógica de multiplicar o grau pelo coeficiente e em seguida baixar o grau para as funções polinomiais e, além disso, quando introduzi uma função com várias parcelas, os alunos rapidamente compreenderam que a derivada da soma é a soma das derivadas.

Devo referir que no início da aula, quando se pretendia determinar a derivada da função afim, alguns alunos não aceitaram tão bem o facto de esta ser apenas o declive, para todo o $x$. Resolvi então, utilizar um argumento geométrico para tentar que eles compreendessem e também tentar perceber se estes se recordavam do significado geométrico da derivada num determinado ponto. Então, desenhei no quadro, num referencial, uma reta e marquei um ponto nessa reta e registei a sua abcissa como $a$. De seguida questionei os alunos sobre qual seria o valor da derivada naquele ponto e eles responderam, quase automaticamente, que era o declive da reta tangente nesse ponto. O facto de os alunos terem dado esta resposta tão pronta, não significava que eles estavam a compreender o que estava em jogo, por isso questionei-os sobre o valor concreto da derivada naquele ponto. Uma aluna responde: “Não há reta tangente” e quando eu perguntei à turma se haveria ou não reta tangente outra aluna diz: “É a reta toda”. Assim que a aluna faz esta afirmação os alunos compreenderam que a reta tangente iria coincidir com a própria função; dando a resposta que a derivada seria $m$. Para me certificar que todos tinham compreendido e para convencer algum aluno que poderia não ter ainda aceitado esta resposta, marquei outro ponto, mas este com abcissa negativa e questionei-os sobre a derivada naquele ponto. Os alunos responderam que a reta tangente era novamente a inicial e que o seu declive era $m$. De facto foi interessante verificar que neste caso a representação gráfica de uma função afim ajudou na determinação da sua função derivada.

Para a derivada da função constante decidi usar o mesmo método e representei, num referencial, uma reta horizontal. Assim que o fiz um aluno diz: “Aí o declive é zero”. Ao que outro responde: “Então a derivada é zero”. Nesta interação não houve qualquer questão da minha parte e os alunos chegaram à função derivada da função constante sem dificuldades.

Devo referir ainda que na determinação da derivada da função $\frac{1}{x}$ houve mais dificuldades, pois esta foi feita pelos alunos autonomamente, através da definição de derivada. Causava-lhes estranheza terem duas “letras” em jogo e também não sabiam o que esperar do resultado final, se iriam obter um valor concreto (real) ou se as letras se manteriam. Também tiveram dificuldade nalguns cálculos, nomeadamente reduzir ao mesmo denominador. Mais uma vez, esta dificuldade poderá ter a ver com as duas letras em denominador e eles não perceberam qual seria o mínimo múltiplo comum.

Foram concluídas todas as funções derivadas que estavam previstas para esta aula mas não houve tempo para exercitar, além dos exemplos que fui colocando. Desta forma, alguns exercícios do manual escolar foram considerados trabalho de casa.

### 3.6.6. 6.ª Aula (13h35-15h05) – 6 de Março de 2015

(O plano para esta aula pode ser consultado no Anexo 1.6.)

Teste de avaliação (Anexo 3.1.)

### 3.6.7. 7.ª Aula (13h35-15h05) – 10 de Março de 2015

(O plano para esta aula pode ser consultado no Anexo 1.7.)

Esta aula iniciou-se com a resolução de uma ficha de trabalho nº 1 (Anexo 2.4.), com algumas tarefas sobre os conteúdos até agora lecionados, para que os alunos aplicassem os seus conhecimentos. Antes da resolução desta ficha de trabalho era importantíssimo que não houvesse dúvidas no trabalho de casa que dizia respeito à aplicação direta das regras de derivação. Os alunos foram questionados sobre dificuldades que tivessem tido na resolução dos exercícios e como estes reponderam que não havia, decidi avançar para a tarefa.

Como as resoluções dos alunos desta ficha de trabalho iriam ser recolhidas foi explicado aos alunos que era importante justificarem todas as respostas e, mesmo que fosse necessário corrigir alguma delas, que o fizessem ao lado, ou seja, que não apagassem o que tinham feito. Foi-lhes também pedido que não consultassem o manual escolar nem o caderno e que sempre que tivessem duvidas me chamassem ou discutissem com o colega. Esta opção de os alunos não consultarem o caderno ou o manual escolar foi tomada tendo em conta o objetivo de recolher as suas resoluções e também tentar perceber as suas dificuldades durante a resolução das várias questões.

Na primeira questão houve alguns pares que imediatamente resolveram corretamente a questão, mas pelo menos um par teve algumas dificuldades a identificar que o limite em questão era a derivada no ponto de abcissa $3$, pois não se tratar do limite que estavam habituados a trabalhar.

Na questão 3 a generalidade dos pares tiveram dificuldades na 3.2. pois queriam determinar o declive da reta tangente pela definição de derivada. Aqui vê-se que os alunos ainda não veem a derivada como uma função, ou seja, que poderiam calcular $f'(1)$ diretamente na expressão da derivada, que tinham calculado anteriormente.

A questão 6. não levantou dificuldade à maioria dos alunos pois rapidamente calcularam o declive da reta. Devo referir que alguns pares sabiam que teriam de calcular o declive da reta, mas não identificaram os dois pontos que lhes permitiam calculá-lo.

A questão 7. gerou mais dificuldades porque também tinha um maior grau de complexidade. Foi interessante verificar que alguns pares excluíram duas hipóteses pois determinaram o ponto de tangência. Uma aluna durante a resolução chegou muito rapidamente a esta conclusão dizendo que como $y = x$ era a reta tangente ao gráfico da função e como $x = 0$ então $y$ também teria que ser $0$ e portanto (0,0) teria que ser o ponto de tangência. Outros pares excluíram duas hipóteses pois determinaram as derivadas e verificaram que $f'(0) = 1$ pois o declive da reta tangente era $1$ e portanto a derivada em $x = 0$ teria que ser $1$.

Durante a discussão destas questões surgiram algumas situações que devo referir. Na questão 1, um aluno perguntou porque é que não se poderia substituir o $x$ por $3$ e assim daria logo $0$. Aqui o aluno não se lembrou que não é possível dividir por zero. Assim que escrevi aquilo que o aluno tinha sugerido, este compreendeu rapidamente que não poderia ser calculado daquela forma. Mesmo assim, decidi fazer um outro exemplo, um outro limite, para ele perceber que por aquele método iria obter sempre $0$ no denominador.

Na questão 3.2, um aluno teve dificuldades em perceber como se determinava o $b$ da equação reduzida da reta, não percebendo em que função deveria substituir o valor $1$. É uma dúvida pertinente pois os alunos têm duas funções e podem baralhar-se mas, por outro lado, pode mostrar que não compreendeu o conceito de tangência, ou seja, que toca a função naquele ponto e, portanto, o ponto em comum pertence à função original e não à função derivada. Tentei esclarecer a dúvida tentando explicar que a reta é tangente ao gráfico da função $f$ e não ao gráfico da função $f'$ e que portanto um ponto dessa reta poderia ser calculado pela $f$ (ponto de tangência).

Na questão 7, os alunos que não conseguiram concluir a questão, pois não identificaram corretamente o ponto de tangência, tiveram algumas dificuldades. Estes alunos pensavam que o ponto seria $(0,1)$, pois quando $x = 0$, a derivada é $1$ e associaram este facto ao que poderia ser o ponto de tangência. Mais uma vez os alunos começam a baralhar os dados que têm e associam a função derivada à própria reta tangente embora saibam que a derivada é apenas o declive desta reta. Esta dúvida possivelmente tem a ver com a dificuldade destes em ver a derivada, por um lado, como uma função independente mas, por outro lado, associada à função original e que o declive da reta tangente dá o valor a que corresponde cada $x$ na função derivada. Depois da discussão e da correção desta questão, considero que não restaram dúvidas nos alunos.

No momento seguinte da aula, estava previsto a determinação da função derivada da função módulo. Para isso foi mostrado aos alunos alguns ficheiros criados no GeoGebra. Devo dizer que os alunos gostaram bastante dos mesmos e estavam atentos ao que estava a ser mostrado e ao que lhes estava a ser questionado.

O primeiro documento dizia respeito à função $x^2$. Foi interessante observar que quando os alunos viram a função derivada da função $x^2$ surgir, não a identificaram com a expressão $2x$ embora oralmente os alunos me tenham dito que a função derivada de $x^2$ era precisamente $2x$. Quando perceberam que a função derivada estava representada graficamente, considero que compreenderam um pouco melhor a relação entre o que obtinham com as regras de derivação e o que isso significava graficamente.

O documento seguinte dizia respeito à função módulo. Na função módulo houve algumas dificuldades em perceberem como seria a reta tangente do seu gráfico. Com alguns exemplos, os alunos perceberam que tinha de ser o próprio gráfico. Quando lhes perguntei como a função módulo poderia ser escrita sem usarem o símbolo de módulo, já não se lembravam do que tinham tratado no 10.º ano, mas com algum apoio recordaram-no e conseguiram responder às questões. Quando lhes perguntei qual seria a derivada daquela função alguns alunos responderam imediatamente que seria $1$ e $-1$, pois usaram as regras de derivação, mas houve alguns alunos, que não compreenderam e perguntaram porque seria assim. Mais uma vez o recurso GeoGebra foi muito importante para que os alunos compreendessem melhor a relação entre a função derivada e os sucessivos declives da reta tangente ao gráfico da função original. Através da visualização, considero que os alunos que ainda tinham dúvidas relativas à função derivada conseguiram compreender o que estava em jogo.

Foi ainda mostrado outro exemplo, de uma função módulo, mas do segundo grau que visualmente era muito interessante e acho que, com este exemplo, os alunos ficaram mais atentos ao que estava a ser mostrado e quando os questionei se haveria ponto ou pontos onde não existia derivada estes, automaticamente responderam o $-2$ e o $2$. Isto mostra que os alunos conseguem perceber, através da representação gráfica das funções (já que não dispõem ainda de métodos analíticos que lhes permita determinar se existe ou não derivada em determinado ponto) onde não existe derivada, nomeadamente nos pontos angulosos.

A resolução do exercício 8. da ficha de trabalho nº 1 levantou algumas questões, nomeadamente na função que teria uma reta tangente vertical, alguns alunos disseram que esta seria diferenciável em $x = 2$, mas depois de relida a definição de diferenciável as dúvidas não continuaram, e os alunos aceitaram a definição não questionando o porquê de isto acontecer. Relativamente às outras funções não sentiram grandes dificuldades em identificar porque não seriam diferenciáveis. De referir que na determinação do valor da derivada em $x = 2$ houve duas situações: uma que diz respeito à reta tangente horizontal, onde alguns alunos ainda responderam $4$ ($y = 4$) e não $0$, porque esta reta tem declive $0$; noutra situação em que a função é uma reta e portanto que a derivada em qualquer ponto é dada pelo declive da própria reta. Mais uma vez, isto mostra que os alunos têm dificuldades com a noção de uma reta tangente a uma reta.

Pelo bom ritmo de trabalho da turma durante esta aula, ainda houve tempo de realizarem um exercício do manual escolar, que dizia respeito à identificação, a partir da representação gráfica, de pontos de descontinuidade e pontos angulosos de uma função, onde não existe derivada. Este exercício tirando uma ou outra dúvida pontual sobre o significado ou linguagem que os alunos deveriam utilizar não levantou grandes dificuldades. Os alunos ainda pensaram na primeira questão de um outro exercício do manual que envolvia a caracterização da função derivada de uma função módulo e como seria a primeira vez a ser resolvida uma questão deste género, foi feita em grande grupo para relembrar a expressão da função módulo sem o símbolo de módulo, dada no 10.º ano. Na determinação da função derivada não houve grandes dificuldades.

Nesta aula os alunos trabalharam muito bem e prova disso é o facto do que estava previsto para a aula ter sido cumprido e, além disso, ainda ter havido tempo de aula disponível para algum trabalho autónomo dos alunos.

### 3.6.8. 8.ª Aula (10h05-11h35) – 12 de Março de 2015

(O plano para esta aula pode ser consultado no Anexo 1.8.)

Esta aula iniciou-se normalmente e os alunos rapidamente começaram a resolver a Tarefa “Evolução das bactérias” (Anexo 2.5.). Os alunos aderiram bem à tarefa, mostrando vontade em trabalhar.

A primeira e segunda questões não levantaram grandes dificuldades o que mostra que os alunos adquiriram bem a derivada como o declive da reta tangente ao gráfico da função e sabem identificar, através do gráfico, os pontos que admitem retas tangentes horizontais e que portanto terão derivada nula.

A determinação da função derivada pelas regras de derivação, salvo pequenos erros de cálculos, não levantou muitas dificuldades, mas a questão 3.2. gerou mais confusão. Embora já tivessem estudado o sinal da derivada numa questão anterior, talvez pela forma como esta estava escrita e por fazer referência a $f'$ gerou mais dificuldades, havendo alguns pares que me questionaram sobre o que era necessário fazer para responder à questão. Considero que os alunos confundem ainda a função original com a função derivada e, por vezes, não sabem a que função recorrer. De uma forma geral os alunos, com uma ou outra dificuldade nos cálculos ou nas justificações e até mesmo de verificação de resultados, foram resolvendo a tarefa até à questão 4.

Alguns pares ainda preencheram a tabela da questão 5 mas não conseguiram fazer uma conjetura sobre os zeros da derivada e os extremos da função. Isto pode dever-se ao facto de serem alunos com maiores dificuldades em Matemática, de uma forma geral, ou porque não detetaram nenhuma relação entre os valores, ou também porque não voltaram a olhar para o gráfico do início da tarefa. Se o tivessem feito, poderiam ter reparado que no eixo das abcissas estavam representados dois valores que iam corresponder aos extremos da função e que eram precisamente os zeros da derivada que tinham calculado. Houve também outras dificuldades, pois esqueciam o contexto do problema e, por vezes, consideravam o domínio das funções como sendo $\mathbb{R}$ .

Depois de discutida a última questão da tarefa, em que os alunos disseram que os extremos da função original correspondiam aos zeros da função derivada, estava previsto mostrar-lhe alguns contraexemplos. Quando foram mostrados exemplos da função módulo e da função $f(x) = x^3$ (através do recurso GeoGebra) achei que os alunos ficaram muito confusos com as várias situações. Via-se na expressão deles que não estavam a compreender como iriam relacionar a derivada com os extremos de uma função. Esta confusão seria expectável pois são conceitos delicados e as hipóteses devem ser bem compreendidas para que os alunos consigam tirar conclusões válidas. Além disso, como tinham feito a tarefa e muitos deles tinham chegado à conclusão de que os zeros da função derivada iriam corresponder aos extremos da função, o facto de ter apresentado dois contraexemplos confundiu-os um pouco.

Mesmo com o quadro resumo que estes passaram para os seus cadernos é possível que alguns ainda tenham ficado com algumas dúvidas, mas acho também que outros compreenderam as hipóteses necessárias. Há ainda a referir um episódio quando uma aluna colocou uma questão sobre o facto de uma função ser sempre positiva e se iriamos conseguir estudar a derivada e conseguir estabelecer a relação com os extremos da primeira. Decidi representar graficamente uma função sempre positiva, mas com extremos e perguntei-lhe em determinados intervalos o sinal do declive da reta tangente e por sua vez, da derivada. Ela respondeu corretamente e como verificámos em conjunto que o sinal da derivada mudava podíamos concluir que iria existir um extremo, como se verificava pelo gráfico representado. Mais uma vez, esta dúvida deve ter a ver com a confusão que os alunos fazem com as duas funções e baralhando-se com o sinal de uma e a monotonia da outra.

O momento seguinte desta aula dizia respeito à resolução de exercícios do manual escolar, para que os alunos tivessem um momento para exercitarem o que tinham abordado anteriormente. Um dos exercícios do manual escolar, onde era pedido o estudo do sinal da função derivada e da variação da função original a partir das suas representações gráficas, foi resolvido e corrigido e na maioria, os alunos não tiveram grandes dificuldades. Há ainda a referir a dificuldade dos alunos a preencherem o quadro de sinais, pois não sabiam o que escrever na linha de $f$, no sítio onde estavam os zeros da derivada. Muitos não sabiam que quando puderem, devem calcular o valor da função naquele valor de $x$, e além disso, o que esse valor iria representar para a função. Foi ainda resolvido e corrigido uma questão de outro exercício do manual, que pedia para mostrar que uma função era estritamente crescente num determinado intervalo e que não levantou grandes dificuldades.

### 3.6.9. 9.ª Aula (13h35-15h05) – 13 de Março de 2015

(O plano para esta aula pode ser consultado no Anexo 1.9.)

Esta aula iniciou-se com a correção do trabalho de casa para garantir que todos os alunos, mesmo os que não o realizaram, pudessem perceber um pouco melhor a relação entre a função derivada e a função original. Este trabalho de casa abordava alguns casos particulares, como a derivada não ter zeros; não haver derivada para alguns pontos e, nestes casos, o que poderiam concluir acerca da função original.

De seguida os alunos começaram a resolver a ficha de trabalho nº 2 (Anexo 2.6.). As questões 1-b) e 1-c) levaram algum tempo a serem resolvidas. No primeiro caso, os alunos mesmo tendo visto a resolução de um exercício do manual semelhante a este tiveram algumas dificuldades na determinação dos zeros da função derivada, em primeiro lugar, por se tratar de uma equação fracionária e depois de ultrapassada esta dificuldade pelo facto de esta função não ter zeros. Alguns alunos questionaram-me sobre o que colocariam no quadro de sinais, pois não tinham zeros da função derivada. Isto mostra que os alunos sabem utilizar o método de derivar a função original, calcular zeros da função derivada e fazer o quadro de sinais, mas quando surge uma função em que tal não acontece, não assumem que podem de qualquer forma estudar o sinal da função derivada para tirarem conclusões acerca da função original. Há ainda a destacar que nenhum aluno se lembrou de recorrer às inequações para resolver o problema em questão.

Na 1-c) a grande dificuldade dos alunos foi escrever a função módulo sem o símbolo de módulo. Como se trata de um conteúdo do programa do 10.º ano, pode estar (e estava) esquecido pelos alunos, o que condicionou o estudo desta função particular. Depois de escrita esta função sem o símbolo de módulo, ou seja, por ramos, alguns alunos tiveram dúvidas na forma como poderiam calcular a função derivada. Para esta dúvida alertei-os para as aulas anteriores onde tinha sido estudada a função módulo. Mesmo depois de estar determinada a função derivada os alunos não conseguiram determinar o sinal da mesma, possivelmente por esta estar definida por ramos, e também, por não a estarem a visualizar como um todo. Mais uma vez não sabiam o que escrever no quadro de sinais e alguns pela forma como a função estava escrita não conseguiram identificar onde a derivada seria negativa e positiva. Neste caso é clara a dificuldade dos alunos saberem interpretar a informação que está contida numa função que está definida por ramos. Foi interessante verificar que foi mais fácil para os alunos estudarem o sinal da função derivada através da sua representação gráfica. Com o auxílio do exemplo que estava na ficha síntese (Anexo 1.8.) os alunos conseguiram estudar o sinal da função que tinham em mãos.

Na questão 3 da ficha de trabalho foi muito interessante ver as discussões entre os pares de alunos e grupos sobre as várias opções que tinham. Houve pelo menos dois pares de alunos que diziam que a opção correta seria a alínea (C) pois tinham uma reta e portanto a derivada iria ser uma reta horizontal. Isto mostra que estes compreenderam a função derivada de uma função afim, tanto analiticamente como graficamente, mas esqueceram a relação que temos vindo a trabalhar entre o sinal da função derivada e a monotonia da função original. Tentei questionar estes alunos sobre o declive da função afim e posteriormente sobre o sinal deste e como isso influenciaria a função derivada. Estes responderam que o declive da função iria ser positivo e compreenderam de imediato que aquela opção não era possível. Há ainda uma situação de uma aluna, que considerava a opção (D) como correta, afirmando que como a função derivada iria ser o "$m$" então teria que ser paralela à função original que também tinha declive "$m$". Interessante esta justificação, mas mostra que não estava a associar o facto de a derivada ser apenas "$m$" e que portanto teria que ser constante. As suas colegas explicaram a esta aluna porque é que não poderia ser aquela hipótese e esta compreendeu e abandonou esta opção. Os outros pares que chegaram a esta questão não a conseguiram fazer sem me questionar sobre o que era necessário fazer naquela questão, o que mostra alguma dificuldade em visualizar funções graficamente principalmente no que diz respeito à relação entre a função e a sua derivada.

Alguns pares ainda resolveram a questão 4, mas foi interessante verificar que a maioria recorreu à calculadora para resolver a questão, questionando-me apenas sobre a validade deste processo. Há ainda a registar alguma dificuldade em responder à questão tendo em conta o contexto do problema e àquilo que era questionado. Como os alunos recorreram à calculadora determinaram o máximo $40$ e sabiam que não tinham ido além dos $30$ dias pelo que $40$ não podia ser a resposta certa. Foram questionados sobre o que representava o domínio (número de dias) e o que representava o $40$ que tinham determinado, ao qual eles responderam que era o $y$; rapidamente perceberam que tinham de responder o valor de $x$ que tinha como imagem o valor $40$. Houve também algumas dificuldades na adequação da janela para observarem o gráfico, mas depois de questionados sobre o domínio, conseguiram resolver a questão. Mais uma vez, esta dificuldade mostra que os alunos não prestam muita atenção ao contexto do problema.

Apesar de os alunos não terem concluído a ficha de trabalho, os alunos trabalharam bem a relação entre a função derivada e a função original, com um bom ritmo de trabalho.

### 3.6.10. 10.ª Aula (13h35-15h05) – 17 de Março de 2015

(O plano para esta aula pode ser consultado no Anexo 1.10.)

A aula iniciou-se com a apresentação e discussão das questões 1-b), 1-c), 3 e 4 da ficha de trabalho nº 2 (Anexo 2.6.) que os alunos tinham resolvido na aula anterior.

Uma aluna apresentou a questão 1-b), mas tinha alguns erros na sua resolução, o que foi, por um lado, bastante positivo pois serviu para haver uma discussão com a turma, retirar algumas dúvidas que existiam e perceber se os alunos estavam a compreender ou não a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação da função original. A aluna que foi ao quadro não resolveu corretamente a equação $g'(x) = 0$ que se tratava de uma equação fracionária, conceito abordado antes da unidade didática. Considero que alguns alunos ainda têm dificuldades na resolução destas equações, o que condiciona o estudo do sinal de funções racionais, nomeadamente na existência de pontos onde não exista derivada. Ainda surgiram algumas questões sobre que valores se deveriam colocar no quadro de sinais. Isto revela que os alunos sabem o método, sabem que têm de colocar os zeros da função derivada, mas como depois utilizam a calculadora gráfica para representarem a função original, para confirmar os resultados, acabam por se confundir, pois obtém outros valores, por exemplo calculando os zeros desta função e depois acabam por não saber o que utilizar no quadro de sinais. Isto pode evidenciar que os alunos ainda não compreenderam totalmente que é a partir do estudo do sinal da função derivada que conseguimos tirar conclusões para a função original, ou seja, os valores a colocar são os zeros da função derivada e os pontos onde esta não existe, pois são estes os candidatos a extremos da função original.

Na segunda questão, a aluna que foi ao quadro também tinha erros na sua resolução, pois escreveu a função módulo sem o símbolo de módulo, mas estudou o sinal da função módulo e a partir desse estudo tirou conclusões acerca da monotonia desta função, ou seja, não calculou a função derivada para estudar o seu sinal. O resto da turma automaticamente percebeu que o que estava a ser apresentado não poderia estar bem, pois necessitavam da função derivada e aí sim, estudar o sinal desta e tirar conclusões para a função original.

Foi interessante perceber que quando questionados sobre a existência de zeros da função derivada a maioria dos alunos automaticamente respondeu que não tinha e, além disso, que a função derivada não estava definida para $x = -1$, pois a função módulo tinha um "bico" e, por isso, não poderia existir derivada nesse ponto. Por esta resposta imediata dos alunos foi possível perceber que a maioria conseguiu compreender a ideia de pontos angulosos, nomeadamente na função módulo. O estudo do sinal da função derivada e do sentido de variação da função módulo foi feito em grande grupo e não houve grandes dificuldades.

Os gráficos da questão 3 foram projetados e, oralmente, uma aluna justificou a opção correta e também o porquê das outras opções não serem as corretas. De uma forma geral os alunos compreenderam as justificações da colega e após a sua apresentação os alunos não manifestaram dúvidas.

Na questão 4 foi necessário apresentar duas resoluções distintas, pois alguns alunos resolveram pela calculadora gráfica e outros analiticamente. Quando as resoluções foram apresentadas, de uma forma geral não houve grandes dificuldades, à exceção do domínio da função e a sua representação no quadro de sinais. Um aluno chegou mesmo a questionar-me sobre a forma como se construiria o quadro de sinais mas rapidamente o compreendeu quando questionado sobre o contexto do problema. Este aluno também me questionou se poderia resolver sempre pela calculadora gráfica, o que é uma questão pertinente, por se tratar de um problema e, como tal, poderá ter várias estratégias de resolução. Foi chamada a atenção dos alunos que um problema de otimização pode ter várias estratégias de resolução, mas quando lhes for exigido que usem processos analíticos, não poderão usar a calculadora gráfica e que o estudo do sinal da derivada é um método eficaz para o resolver.

Depois de discutidas estas questões da ficha de trabalho, os alunos tiveram algum tempo para resolver autonomamente a questão 5. Esta questão levantou algumas dificuldades principalmente nas alíneas b) e c). Na alínea b) levantaram questões relacionadas com a forma de justificação dos pontos onde não existiria derivada e houve ainda dificuldades quanto aos extremos da função. Era expectável que os alunos tivessem dúvidas sobre a parte da função que é constante, e foi necessário, para alguns alunos, recordar o que é ser máximo relativo e a desigualdade $\geq$ e que portanto, todos os valores presentes na parte constante também eram máximos. Na questão c) surgiram mais dificuldades, onde reparei que houve alunos que fizeram o quadro de sinais da função derivada mas completaram-no com a variação da função, o que não era pedido. Houve ainda dúvidas na representação no quadro de sinais, onde a derivada era nula, pois nunca esta representação tinha surgido. Depois estes compreenderam que como a função derivada é nula naquele intervalo então temos de a representar com um 0, pois a função nem é positiva nem negativa.

No momento seguinte os alunos resolveram uma proposta do manual escolar que envolvia o conceito de derivada e velocidade. Desde início esta proposta levantou algumas dificuldades, embora alguns alunos tenham dito que a velocidade média se ia calcular com a taxa média de variação, embora não soubessem justificar a relação entre o pedido e a taxa média de variação. Devido a estas dificuldades decidi resolver esta proposta em grande grupo. Decidi relembrar-lhes que a velocidade é dada por $\frac{d}{t}$ e tracei um gráfico de uma função, distância em função do tempo e marquei uma abcissa $a$ e outra $b$, questionando-os sobre o que representava geometricamente a taxa média de variação e também pedindo-lhes a fórmula para a calcular. Os alunos responderam corretamente e como na fórmula o que temos em numerador é a variação de distância e em denominador variação do tempo, então a taxa média de variação em $[a, b]$ representa, no contexto destas funções, a velocidade média em $[a, b]$. Considero que os alunos compreenderam de uma forma mais clara o significado da velocidade média neste tipo de funções. Quando questionados sobre a questão 2 da proposta, que se referia à velocidade num instante, alguns alunos responderam que teria de ser a derivada. Eu confirmei, e oralmente calcularam a função derivada e responderam corretamente e com contexto. Isto mostra que os alunos compreenderam a relação entre uma função distância/tempo e o que significa a sua função derivada.

Devo referir que depois de refletir sobre esta aula, acho que deveria ter reforçado um pouco mais o que representa a função derivada naquele contexto. É certo que os alunos conseguiram resolver bem a tarefa, em grande grupo, mas não sei se ficou completamente claro, que a função derivada que determinaram representa então a velocidade em função do tempo, e que a cada $t$ obtemos a velocidade nesse instante. A aula acabou com a resolução desta proposta.

### 3.6.11. 11.ª Aula (10h05-11h35) – 19 de Março de 2015

(O plano para esta aula pode ser consultado no Anexo 1.11.)

Como para esta aula estavam reservados cerca de 30 minutos no final da aula para a entrega das fichas de avaliação e autoavaliação estava previsto que os alunos realizassem os exercícios 2, 4 e 5 da ficha de trabalho nº 3 (Anexo 2.7.).

Na questão 2, inicialmente, alguns alunos não estavam a compreender como poderiam identificar a função original e a sua função derivada. Depois de questionados sobre a relação que existe entre ambas foi interessante perceber que alguns concluíram o que eram pedido pelo grau das funções polinomiais, justificando que a função original teria que ser a cúbica, pois tem grau três e a sua função derivada era a quadrática, pois tinha grau dois e pelas regras de derivação baixamos sempre em uma unidade o grau deste tipo de funções. Outros alunos concluíram o que era pedido através da relação entre o sinal da função derivada e sentido de variação de uma função, justificando assim, naquele caso que quando a derivada era negativa (positiva) a função original era decrescente (crescente), e isto só era possível se escolhessem a quadrática como função derivada.

Na questão 4 fiquei surpreendida com as respostas rápidas dos alunos, nomeadamente no esboço do gráfico da função $f$. Foi muito interessante ver que os alunos, de uma forma geral conseguiram esboçar o gráfico da função sem dificuldades. Onde surgiram dificuldades foi na construção do quadro de sinais da função derivada, nomeadamente nos valores que colocariam em $f'(-2)$ e $f'(3)$. A maioria dos alunos, depois de questionados sobre os “candidatos” a extremos da função, respondeu que seriam os zeros da função derivada e quando questionados do porquê disto acontecer, alguns responderam que como a função derivada passava de negativa para positiva então teria que passar no zero. A um dos alunos questionei-o com a função módulo, que também mudava de sinal mas que não tinha zeros. Uma aluna deu outra resposta ao que seria $f'(-2)$ e $f'(3)$ colocando no quadro de sinais “S.S.”. Também quando questionada sobre a justificação do que tinha escrito, a aluna não conseguiu responder. Depois disso ainda a questionei sobre outros exercícios que já tínhamos feito e ela recordou-se dos zeros da função derivada e chegou mesmo a questionar-me como é que saberíamos quando seria um zero da função derivada ou um valor sem significado. Estas dificuldades levaram-me a questioná-los sobre o tipo de função que tínhamos naquela questão, e se haveria alguma restrição no seu domínio. Não sei se os alunos compreenderam de facto o que significa uma função polinomial relativamente à não restrição do domínio da sua função derivada, mas estes acabaram por representar os zeros da função. Posso dizer também que acredito que alguns alunos tenham colocado os zeros da função derivada apenas por se tratar do procedimento que muitas vezes eles tinham realizado, mesmo que no sentido inverso.

Na questão 5 salvo algumas dificuldades na janela de visualização da calculadora, posso dizer que também me deixou surpreendida a rapidez com que os alunos responderam à questão, identificando claramente que em $x = -2$ e $x = 2$ não haveria derivada pois se tratavam de “bicos” da função.

Depois deste momento de trabalho autónomo foi altura para se apresentar e discutir os resultados. Na questão 2 foi uma aluna ao quadro que justificou a sua opção dizendo que a função quadrática teria que ser a função derivada e a cúbica a função original. Como sabia que havia alunos que tinham resolvido a questão de outra forma, pedi à turma para quem tivesse respondido de outra forma para responder oralmente. Um dos alunos que se voluntariou começou por responder dizendo que a função original tinha três zeros, o que estava de acordo com o que a aluna que tinha ido ao quadro tinha dito e acabei por não deixar o aluno explicar com todo o detalhe a sua resposta. Depois de refletir sobre isto, considero que deveria neste caso ter deixado o aluno explicar a sua resolução, pois alguns alunos poderão não ter compreendido o porquê a quantidade de zeros estar relacionada com o grau da função polinomial. Depois, um outro aluno justificou a sua opção pela relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação da função. Depois desta explicação teria sido bom, em conjunto com os alunos, mostrar que a outra hipótese não era possível.

Na questão 4, após um aluno ter apresentado os seus resultados não houve grandes dificuldades, havendo apenas uma aluna que não se recordava do que significava uma função ser polinomial. Este tipo de dificuldades pode ser determinante para a compreensão das tarefas, pois mesmo que a aluna tenha feito o exercício da mesma forma que estava no quadro, a sua justificação para o facto de colocar zeros na função derivada não deveria ser a mais correta.

Na apresentação dos resultados da questão 5, uma aluna foi ao quadro e de uma forma geral todos os alunos a compreenderam. Questionei-os apenas para a justificação para em $x = -2$ e $x = 2$ não haver derivada, ao qual me responderam “porque são bicos”. Ora, foi importante esta questão pois pude chamar-lhes a atenção para as suas justificações e que a esses pontos chamamos pontos angulosos. Questionei-os ainda sobre outra forma de justificar a não existência de derivada em determinados pontos, ao qual alguns alunos falaram na reta tangente. Uma aluna ainda referiu que nesses pontos seria $0$ o declive da reta tangente e por isso foi necessário voltar olhar para o gráfico (que também tinha parte de uma parábola) para que ela conseguisse perceber a diferença nos pontos onde há reta tangente horizontal e onde não a conseguimos determinar. Questionei-a também sobre a função módulo, que já tinha sido bastante trabalhada e como esta respondeu corretamente, penso que terá compreendido a diferença entre os pontos onde existirá uma reta tangente horizontal e onde não conseguimos ter um reta tangente ao gráfico da função.

Como os alunos trabalharam tão bem nesta parte da aula, ainda houve tempo para avançarem e pedi-lhes que fizessem a questão 6 da ficha de trabalho, que não estava prevista ser realizada nesta aula. De uma forma geral os alunos também me surpreenderam porque usaram os seus conhecimentos sobre a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação de uma função e concluíram imediatamente que como a função seria decrescente a imagem de $3$ teria que ser menor que a imagem de $0$. De notar que alguns alunos, por terem algum tempo disponível ainda iniciaram outras questões da ficha de trabalho. Os alunos em seguida receberam as fichas de avaliação e fizeram a sua autoavaliação preenchendo uma ficha de autoavaliação.

### 3.6.12. 12.ª Aula (13h35-15h05) – 20 de Março de 2015

(O plano para esta aula pode ser consultado no Anexo 1.12.)

A aula iniciou-se um pouco mais tarde e com alguns alunos a chegarem atrasados devido à inscrição nos exames nacionais. Os alunos concluíram a ficha de trabalho nº 3 (Anexo 2.7.), as questões 1 e 3.

Tanto a questão 1 como a 3 foram surpreendentes pelas respostas rápidas dos alunos e poucas dificuldades que se verificaram. Na primeira questão foi interessante perceber que rapidamente os alunos compreenderam que teriam de pensar de forma inversa às regras de derivação que conheciam. Era expectável que tivessem dificuldades em determinar a constante que tornava a função quadrática completa, mas de uma forma geral os alunos perceberam que teriam de utilizar o ponto, dado no enunciado, para determiná-la. Houve um caso de um par que me questionou sobre a função que tinham determinado, para verificar se estava correta, como ainda não tinham calculado a constante, questionei-os sobre essa possibilidade e uma das alunas disse logo: "Vês, eu disse-te que faltava alguma coisa, e vamos ter que utilizar o ponto". Aí percebi, que esta aluna tinha compreendido a questão, mas a sua colega não ficou totalmente esclarecida e resolvi dar-lhe um exemplo concreto. Escrevi uma função igual à que ela já tinha determinado mas acrescentei uma constante e questionei-lhe sobre a função derivada daquela função. Ela percebeu que a função derivada iria dar a do enunciado e que portanto haveria mais do que uma função que teriam a mesma função derivada. Ela acabou por dizer: "Ah! Por isso é que precisamos do ponto. Substituímos e descobrimos o que falta". Depois disto não tiveram mais dificuldades e considero que esta aluna compreendeu que com aquele ponto descobrimos a função pretendida.

Na questão 3 a alínea a) não suscitou grandes dificuldades pois os alunos, nesta fase, já compreenderam a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação da função original. Na alínea b) os alunos tiveram mais dificuldades embora ficasse surpreendida pela maioria ter conseguido resolver sem dificuldades. Esperava que os alunos sentissem dificuldades na análise do intervalo $]2,5[$, mas como numa aula anterior tínhamos feito um exercício em que havia uma função que tinha uma parte constante e eles tinham visto que nesse intervalo a função teria sempre máximos, penso que poderá ter ajudado para a resolução desta questão. Devido a esse exercício, os alunos identificaram que quando a derivada é nula a função é constante, e como vinha crescente, portanto são máximos. Foi interessante ver que alguns alunos esboçaram o gráfico da função original no mesmo referencial que a função derivada pois, segundo eles, seria mais fácil responder à questão.

De seguida foi feita a correção e discussão dos resultados e foi bom, mais uma vez, os alunos mostrarem à vontade para justificarem perante os colegas as suas resoluções. Foi importante ver que os alunos adquiriram bem os conceitos e sabem explicar e, além disso, têm confiança naquilo que fizeram; foi uma evolução muito positiva, da turma em geral.

Depois deste momento, os alunos ainda tiveram oportunidade de resolver dois problemas de otimização da ficha de trabalho nº 4 (Anexo 2.8.) o problema nº 1 e o nº 3. No primeiro problema de otimização houve algumas dúvidas relativamente ao domínio da função, havendo alguns alunos a questionarem-me se o $t$ estaria entre 8h e 18h ou 0h e 10h. Depois de questionados sobre a definição da variável, alguns compreenderam que teria de ser o segundo caso. Depois de dissipadas estas dúvidas, as duas primeiras alíneas foram resolvidas muito bem pelos alunos, tendo estes em atenção o contexto do problema. Na alínea c) a maioria dos alunos recorreu à calculadora gráfica, havendo alguns, que recorreram ao estudo do sinal da função derivada. Interessante perceber que, mesmo depois de resolvidos muitas tarefas sobre a relação entre a derivada e a função, os alunos neste tipo de problemas tendem a recorrer à calculadora gráfica, para determinar o extremo de uma função, mesmo sabendo que podem recorrer ao estudo do sinal da função derivada. Na apresentação dos resultados, as duas resoluções foram expostas e mais uma vez os alunos foram alertados para o facto de na impossibilidade de usarem calculadora gráfica têm um método eficaz para resolverem o problema.

No segundo problema como era pedido aos alunos para usarem a calculadora gráfica não houve grandes dificuldades à exceção de alguns problemas com o ajuste da janela para visualizarem o gráfico da função. Este problema também foi apresentado e discutido e respondido segundo o contexto do mesmo.

Esta foi a última aula da unidade didática e a evolução dos alunos foi notória, pela forma como compreenderam as tarefas e responderam às mesmas.

# Capítulo 4

# Métodos e procedimentos de recolha e análise de dados

Neste capítulo é feita uma descrição da metodologia da investigação. Em primeiro lugar, são apresentadas as principais opções metodológicas deste estudo, tendo em conta o objetivo deste e as questões de investigação. Posteriormente, faço uma breve caracterização dos alunos participantes do estudo, explicitando os critérios de seleção adotados. Ainda neste capítulo apresento os métodos de recolha de dados e finalmente descrevo o processo de recolha e análise de dados.

## 4.1. Opções Metodológicas

Quando falamos em investigação na área da Educação são diversas as opções metodológicas que podem ser adotadas. Estas opções vão depender, principalmente do objetivo e das questões de investigação. Uma vez que o meu objetivo de estudo é analisar a compreensão que alunos do 11.º ano revelam da noção de derivada e a sua relação com a sua função original, em diferentes representações e, tendo em conta isso, compreender como é construído o conhecimento matemático tendo em conta o ponto de vista dos alunos e os seus próprios significados quando esta relação está presente, optei por uma metodologia de investigação de natureza qualitativa, pois como defende Coutinho (2013) as noções de compreensão e significado caracterizam este tipo de abordagem.

Neste estudo encontram-se as cinco características definidas por Bogdan e Biklen (1994) para uma investigação de natureza qualitativa: 1) "na investigação qualitativa a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal" (p. 47) e neste estudo a fonte direta é precisamente a sala de aula, onde existe um contacto direto com a atividade dos alunos em torno das tarefas propostos, que procuro compreender, pois além de ser professora assumo um papel de investigadora; 2) "a investigação qualitativa é descritiva" (p. 48); pois os resultados são apresentados de forma descritiva, através da análise holística das resoluções das tarefas pelos alunos; 3) "os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos" (p. 49) pois o meu interesse não incide apenas sobre o produto final, se os alunos acertam ou não nas questões propostas, mas sim no processo de resolução e também na forma como pensam e justificam as suas opções; 4) "os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva" (p. 50), pois como não pretendo confirmar nenhuma hipótese pré-estabelecida, a análise dos dados terá um carácter indutivo, não partindo de categorias pré-definidas e 5) "o significado é de importância vital na abordagem qualitativa" (p. 50) e, neste estudo pretendo compreender como os alunos compreendem o conceito de função derivada, como a relacionam com as propriedades da função original e, principalmente, que significado atribuem a estas noções.

## 4.2. Participantes no estudo

O estudo visa uma turma de 11.º ano de escolaridade constituída por 14 alunos. Todos os alunos da turma participam no estudo, pois além de ser um número reduzido para a generalidade das turmas, a análise de dados irá centrar-se numa visão global das resoluções e significados que os alunos atribuem aos conceitos.

A seleção dos participantes está dependente da sua disponibilidade para participar na investigação, sendo um importante critério a ser considerado. No caso desta turma, uma vez que já no ano anterior tinha participado num estudo semelhante a este, desde cedo todos os alunos revelaram-se com disponibilidade e interesse em participar nesta investigação. Devo referir que os alunos que não pertenciam à turma desde o início do ano letivo foram informados sobre o estudo e também estes mostraram interesse em participar. Por uma questão de ordem ética ainda que fossem alunos do ensino secundário, foi solicitado aos encarregados de educação que autorizassem, por escrito, a participação e a recolha de dados dos seus educandos (Anexo 4.2.), pois todos devem ser informados dos propósitos e das atividades que se vão desenvolver no estudo (Erickson, 1986). Todos os encarregados de educação concederam essa autorização. Por uma questão de anonimato, serão usados pseudónimos para o nome dos alunos.

Além do critério anterior, seria necessário selecionar participantes com qualidade no discurso oral e escrito, pois são aspetos fundamentais à análise das suas resoluções e justificações escritas, como eventuais intervenções orais. Mais uma vez, pelo número reduzido de alunos na turma e pelas suas características já descritas anteriormente este critério também é satisfeito.

Um terceiro critério diz respeito à escolha de alunos com diferentes níveis de desempenho na disciplina de Matemática A, pois desse modo poderei analisar se os alunos compreendem de forma diferente ou atribuem diferentes significados ao conceito de derivada e à relação que se estabelece entre esta e a função original, tendo em conta esses níveis de desempenho. Como esta turma é caracterizada por ter bom aproveitamento, mas é composta por alunos de diferentes níveis de desempenho, este critério também é satisfeito.

## 4.3. Métodos de Recolha de Dados

Tendo em conta o objetivo e questões do estudo, a recolha de dados realizou-se recorrendo essencialmente a dois métodos, a observação direta das aulas e produções escritas dos alunos, e de forma complementar a um diário de bordo.

### 4.3.1. Observação das aulas

A observação das aulas permite “a investigação de fenómenos nos seus contextos de ocorrência natural” (Silva, 2012, p. 82). Tendo em conta o grau de participação do investigador, esta pode ser participante ou não participante. Como neste estudo sou investigadora e professora em simultâneo, esta opção determina que seja uma observação participante. Com este método, “o investigador assume um papel ativo e atua como mais um membro do grupo que observa” (Coutinho, 2013, p. 138). Assim, com este instrumento observei como os alunos interagem em contexto de sala de aula, nomeadamente, durante o seu trabalho autónomo, bem como nos momentos de discussão coletiva.

Também para Stein e Smith (2009) a observação constitui um instrumento preponderante na prática reflexiva de um professor sobre as aprendizagens dos alunos, pois permite-lhe ter uma melhor perceção da dinâmica de sala de aula, do raciocínio matemático dos alunos e de que forma estes lidam com a comunicação em ambiente de sala de aula.

### 4.3.2. Recolha documental

As resoluções escritas dos alunos são um instrumento central na recolha de dados. É um instrumento que permite uma análise detalhada das estratégias de resolução dos alunos, dos seus processos de raciocínio, bem como das suas dificuldades. Além disso, esta escolha prende-se também com o facto de que analisando as resoluções das tarefas propostas torna-se possível efetuar comparações entre elas e analisar a evolução ocorrida nos alunos (Silva, 2012), no que diz respeito ao conceito de função derivada e à relação que se estabelece entre esta e a função original.

Neste estudo, a recolha das produções dos alunos cingiu-se à segunda subunidade didática lecionada, devido ao objetivo e questões de investigação deste estudo, no entanto as resoluções dos alunos ao longo de toda a unidade didática foram analisadas de forma a perceber como estes estavam a compreender os conceitos à medida que foram lecionados. Desta forma, a recolha acompanhou toda a minha intervenção.

Um dos constrangimentos do uso deste instrumento na recolha de dados é o facto de os alunos ao escreverem a lápis, muitas vezes apagam o que escrevem, não permitindo assim ao investigador perceber como este estava a pensar para resolver aquela questão. Ao longo de toda a unidade didática tive o cuidado de pedir aos alunos que não apagassem as suas resoluções e que qualquer correção fosse feita de forma a não anular o que estes tinham escrito. Por vezes tive que reforçar este pedido e relembrar aos alunos que não apagassem o que tinham escrito e, de uma forma geral, estes conseguiram aceder ao pedido, muitas vezes escrevendo a correção noutra cor ou ao lado do que tinham escrito originalmente.

Como a metodologia de trabalho dos alunos em sala de aula é muitas vezes o trabalho a pares, muitas das resoluções dos alunos que foram recolhidas são do par e não apenas de um elemento. Quando isso acontece e existem duas resoluções idênticas de um par, a seleção é aleatória ou é selecionada a resolução que for mais legível.

### 4.3.3. Diário de bordo

No decurso da recolha de dados recorri também a um "diário de bordo" que serviu fundamentalmente para a produção das descrições sumárias das aulas e fazer anotações referentes a situações que me pareceram mais relevantes para este estudo, nomeadamente alguns momentos de aula onde se evidenciaram processos de raciocínio. O "diário de bordo" além de me permitir recolher dados de uma forma natural, ajudou-me a ter uma visão progressiva e continuada do trabalho realizado e refletir sobre o estudo à medida que este foi decorrendo, tornando-se num método de recolha de dados importante para a análise dos dados (Bogdan & Biklen, 1994).

## 4.4. Análise de dados

A análise de dados procura responder ao objetivo do estudo e responder às questões de investigação, utilizando os dados recolhidos. Como neste estudo sou investigadora e professora em simultâneo e um dos instrumentos de recolha de dados é a observação participante das aulas, torna-se vital que a análise dos dados decorra ao mesmo tempo que a unidade didática é lecionada e os dados são recolhidos, já que "nesta fase da análise, um dos aspetos principais é a reflexão regular sobre os eventos observados, interpretando-os e prospetando eventos futuros" (Mata-Pereira, 2012, p. 48).

Uma segunda fase na análise dos dados diz respeito à organização dos dados recolhidos, para que se torne mais fácil ao investigador fazer a sua análise e tirar conclusões sobre os mesmos.

Tendo em conta o objetivo e questões de investigação deste estudo, os dados recolhidos estão divididos pelos principais conceitos presentes em cada questão das tarefas e por aluno ou por par de alunos. A opção por esta divisão diz respeito à procura de relações e conexões entre as diferentes estratégias de resolução dos alunos, bem como as suas dificuldades e no significado que atribuem aos conceitos envolvidos em cada questão. Desta forma, as questões analisadas estão organizadas do seguinte modo: as três questões iniciais dizem respeito à noção de função derivada, abordando a sua representação algébrica, o significado geométrico e a definição do seu domínio, nomeadamente a noção de pontos angulosos. As questões seguintes dizem respeito à relação entre a função derivada e a função original, percorrendo as suas representações algébricas, incluindo a análise de um problema de otimização, e as suas representações gráficas.

# Capítulo 5

# Análise de Dados

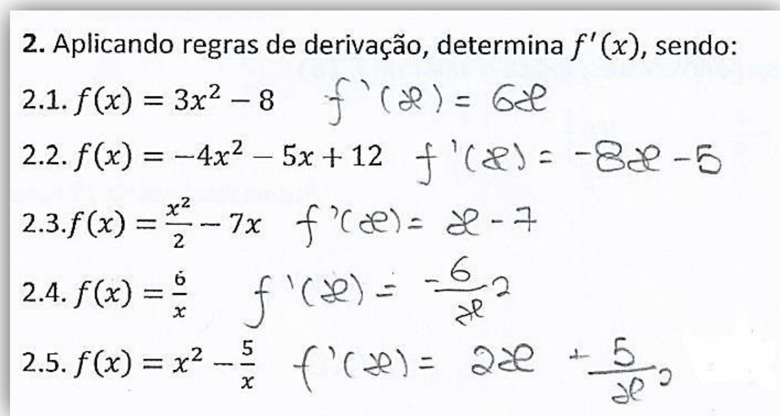
Neste capítulo, tendo em conta o objetivo e as questões formuladas neste estudo, pretendo apresentar e analisar os dados recolhidos ao longo da segunda parte da unidade didática lecionada. Esta análise tem por base as produções dos alunos em algumas das tarefas realizadas nas aulas.

Este capítulo encontra-se estruturado por tarefa, onde analiso as resoluções dos alunos e no final apresento uma síntese do que fizeram e as suas principais dificuldades, em articulação com as questões do estudo.

## 5.1. Ficha de trabalho nº 1 – Questão 2

Relativamente à representação algébrica de função derivada, nomeadamente à determinação desta a partir das regras de derivação, a questão 2. da ficha de trabalho nº 1 (Anexo 2.4.) mostra que os alunos compreenderam bem estas regras, sabendo aplicá-las sem dificuldades. Nas aulas anteriores à resolução desta questão, os alunos tinham aprendido todas as regras de derivação presentes no Programa de Matemática A do 11.º ano e tinham também resolvido alguns exercícios aquando da lecionação destas.

Esta questão foi resolvida em pares e a figura seguinte (Figura 10) mostra a resolução de um par da turma, alunos Sofia e Bruno, que é representativa do que foi feito pela turma.


**2.** Aplicando regras de derivação, determina $f'(x)$, sendo:

2.1. $f(x) = 3x^2 - 8$ $\quad f'(x) = 6x$

2.2. $f(x) = -4x^2 - 5x + 12$ $\quad f'(x) = -8x - 5$

2.3. $f(x) = \frac{x^2}{2} - 7x$ $\quad f'(x) = x - 7$

2.4. $f(x) = \frac{6}{x}$ $\quad f'(x) = \frac{-6}{x^2}$

2.5. $f(x) = x^2 - \frac{5}{x}$ $\quad f'(x) = 2x + \frac{5}{x^2}$

**Figura 10 - Resolução da Sofia e do Bruno à questão 2 da Ficha de trabalho nº 1**

É fácil perceber pela Figura 10, que os alunos conseguem determinar as expressões algébricas das funções derivadas de funções polinomiais, neste caso do 2.º grau, bem como de funções racionais do 1.º grau. Além disso, os alunos apreenderam que a derivada da soma é a soma das derivadas, determinando as funções derivadas de modo imediato a partir das regras.

Devo referir ainda que, embora todos os alunos tenham resolvido a questão sem grandes dificuldades, ao longo do trabalho autónomo fui detetando alguns erros de cálculo, nomeadamente nas funções racionais do 1.º grau, mas que os próprios alunos foram detetando e corrigindo.

**Em síntese,** uma vez que uma das questões de investigação deste estudo é analisar como os alunos interpretam a noção de função derivada em diferentes representações, a questão analisada anteriormente diz respeito especificamente à função derivada representada algebricamente. De uma forma geral, os alunos não evidenciam dificuldades na determinação da expressão algébrica da função derivada de diferentes funções, polinomiais de 2.º e 3.º graus e racionais do 1.º grau. O facto de os alunos não revelarem dificuldades na aplicação das regras de derivação pode dever-se precisamente a estas corresponderem a uma técnica algébrica que não exige uma compreensão concetual, não querendo isto dizer que os alunos compreendem verdadeiramente a noção de função derivada.

Assim, embora não seja possível verificar com a análise desta questão se os alunos reconhecem a derivada como uma função, considero que os alunos compreendem as regras de derivação, tão importantes para a determinação da expressão algébrica da função derivada, e que sabem aplicá-las na resolução de exercícios.

## 5.2. Ficha de trabalho nº 1 – Questão 3

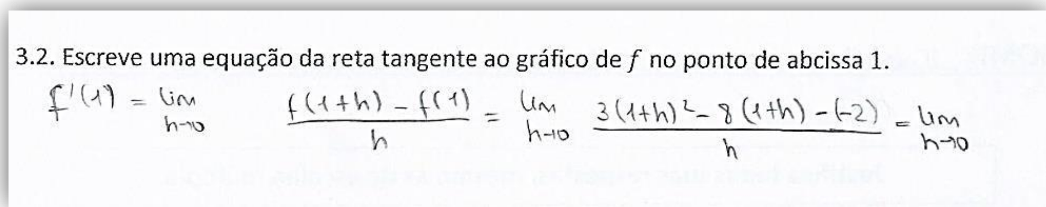
Analisando a questão 3 da ficha de trabalho nº 1 (Anexo 2.4.), a primeira alínea, onde era pedido aos alunos para determinarem a expressão algébrica da função derivada de uma função polinomial do 3.º grau, mais uma vez, não levantou dificuldades. Estes conseguiram determiná-la muito rapidamente e sem erros de cálculo.

A segunda alínea, 3.2., merece uma análise mais cuidada, pois era pedido aos alunos que determinassem a reta tangente ao gráfico da função polinomial do 3.º grau no ponto de abcissa 1. Os alunos anteriormente já se tinham confrontado com este tipo de questão, mas apenas recorrendo à definição de derivada. No momento da resolução desta questão, como os alunos já conheciam a noção de função derivada, ou seja, que a cada valor de $x$ a função derivada dá o valor da derivada nesse ponto, seria de esperar que estes usassem este conhecimento. No entanto, como se pode ver pela Tabela 3 isso não aconteceu com todos os alunos.

| **Resposta** | **N.º de Alunos ($n = 13$)** | **% de Alunos** |
|---|---|---|
| Recorrendo à definição de derivada num ponto | 2 | 15,4% |
| Recorrendo à função derivada | 6 | 46,2% |
| Recorrendo à calculadora gráfica | 1 | 7,7% |
| Não respondeu | 4 | 30,8% |

**Tabela 3 - Respostas apresentadas pelos alunos à questão 3.2. da Ficha de trabalho nº 1**

Na figura seguinte (Figura 11) é apresentada uma das respostas dadas a esta questão, em que as alunas Nicole e Sara recorreram à definição de derivada num ponto.


3.2. Escreve uma equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa 1.

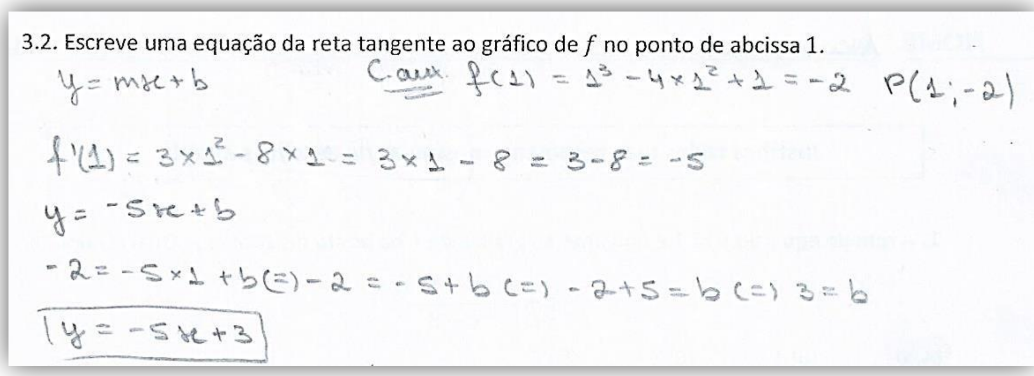
$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(1+h)^2-8(1+h)-(-2)}{h} = \lim_{h\to 0}$

**Figura 11 - Resposta da Nicole e da Sara à questão 3.2. da Ficha de trabalho nº1**

Pela resolução apresentada é claro que, embora as alunas conheçam a expressão para o cálculo da derivada num ponto, não a usaram corretamente, recorrendo à expressão algébrica da função derivada determinada na alínea anterior no lugar da função original. Esta troca pode ser devida ao facto de as alunas estarem a trabalhar com duas funções ao mesmo tempo e como pretendiam determinar a derivada no ponto de abcissa 1, pensarem que teriam de usar precisamente a expressão da função derivada. Isto mostra que estas alunas podem não ter compreendido, por um lado a definição de derivada num ponto e, por outro, o conceito de função derivada, pois não usaram estas noções para determinar o declive da reta tangente ao gráfico da função.

Devo ainda salientar que, as alunas que recorreram a esta definição, abandonaram o cálculo, acabando por não terminar a questão segundo este método. As alunas podem não ter terminado o exercício devido a dificuldades na manipulação do limite, pois trata-se de um tópico relativamente recente na sua aprendizagem associado a um conceito que os alunos têm habitualmente dificuldades em compreender. Além disso, estas alunas poderão ter ficado sem tempo para a conclusão do exercício, durante a aula.

De seguida apresento um exemplo de uma resolução (Figura 12) onde um par recorreu à expressão algébrica da função derivada para responder a esta questão.


3.2. Escreve uma equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa 1.

$y = mx + b$ C.aux. $f(1) = 1^3 - 4\times 1^2 + 1 = -2$ $P(1;-2)$

$f'(1) = 3\times 1^2 - 8\times 1 = 3\times 1 - 8 = 3-8 = -5$

$y = -5x + b$

$-2 = -5\times 1 + b \Leftrightarrow -2 = -5 + b \Leftrightarrow -2+5 = b \Leftrightarrow 3 = b$

$\boxed{y = -5x+3}$

**Figura 12 - Resposta da Margarida e da Helena à questão 3.2. da Ficha de trabalho nº 1**

Nesta figura é fácil perceber que este par conseguiu, recorrendo à expressão algébrica da função derivada determinada anteriormente, calcular o declive da reta que era pedido. Devo dizer que a maioria dos alunos que recorreu a este processo não teve grandes dificuldades na determinação do declive, havendo apenas alguns alunos que apresentaram alguns erros na determinação da ordenada na origem, pois não usaram o ponto de tangência correto. A figura seguinte (Figura 13) apresenta um exemplo dessa situação.

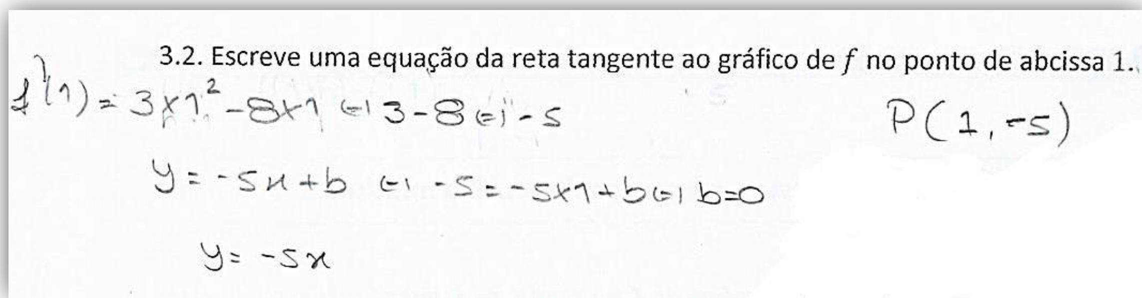
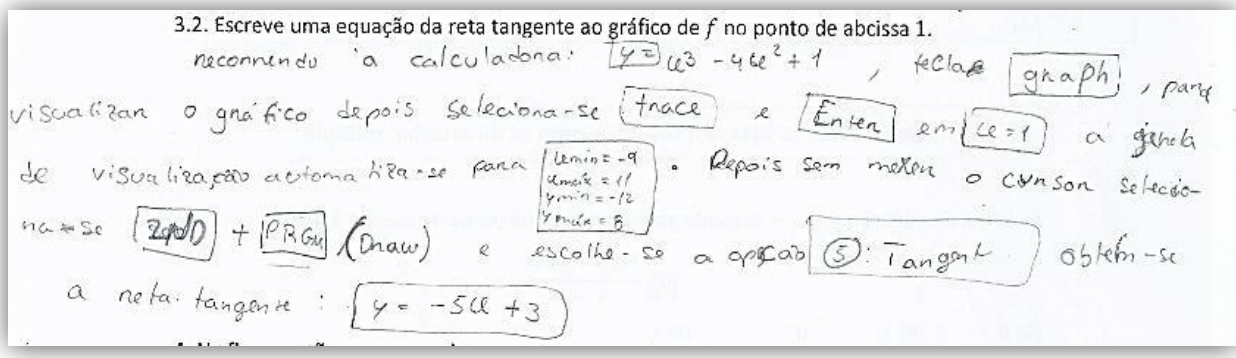



**Figura 13 - Resolução da Cláudia à questão 3.2. da Ficha de trabalho nº 1**

Esta aluna determinou corretamente o declive da reta tangente, mas recorreu ao ponto $(1, -5)$ obtido através da expressão algébrica da função derivada para calcular a ordenada na origem da reta tangente ao gráfico da função. Este erro mostra que a aluna pode não ter compreendido o conceito de reta tangente ao gráfico de uma função, no que diz respeito à existência de um ponto em comum à reta tangente ao gráfico da função e à própria função e não ao da sua função derivada. Mais uma vez, pelo facto de os alunos estarem a trabalhar com duas funções em simultâneo e saberem que existe uma relação entre uma reta tangente ao gráfico de uma função e a derivada dessa função, podem pensar que devem recorrer precisamente à expressão algébrica da função derivada para determinar a ordenada na origem da reta tangente ao gráfico da função.

Apresento ainda a resolução do Bruno (Figura 14) que recorreu à calculadora gráfica para responder à questão.



3.2. Escreve uma equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa 1.

recorrendo à calculadora: $\boxed{y=}\ x^3 - 4x^2 + 1$, tecla $\boxed{\text{graph}}$, para visualizar o gráfico depois seleciona-se $\boxed{\text{trace}}$ e $\boxed{\text{Enter}}$ em $\boxed{x=1}$ a janela de visualização automatiza-se para $\boxed{\begin{matrix} x_{min}=-9 \\ x_{max}=11 \\ y_{min}=-12 \\ y_{max}=8 \end{matrix}}$. Depois sem mexer o cursor seleciona-se $\boxed{\text{2ND}}$ + $\boxed{\text{PRGM}}$ (Draw) e escolhe-se a opção $\boxed{5: \text{Tangent}}$ obtém-se a reta tangente: $\boxed{y = -5x + 3}$

**Figura 14 - Resposta do Bruno à questão 3.2. da Ficha de trabalho nº 1**

Esta resolução que não tinha sido antecipada por mim, não deixa de ser válida, pois o enunciado da questão não exigia que se determinasse a reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa $1$ por processos analíticos. Este aluno respondeu corretamente à questão e pode ter recorrido a este processo porque numa aula anterior, na tarefa “Derivando ponto a ponto” (Anexo 2.3.), os alunos determinaram várias retas tangentes ao gráfico de uma função em pontos escolhidos por estes, através da calculadora gráfica.

Este processo, em que o aluno inicialmente representou graficamente a função na calculadora gráfica, depois fixou a abcissa $1$ e depois usando a tecla *Tangente* a calculadora determina a reta tangente ao gráfico da função no ponto fixado anteriormente, embora seja válido neste caso poderá induzir em erro, pois nalguns casos, quando não existe derivada num ponto, a calculadora gráfica determina a equação da reta tangente como $y = 0$. O recurso a este processo poderá também revelar que o aluno pode não ter compreendido o conceito de função derivada ou a definição de derivada num ponto.

Por último, a Tabela 3 mostra que quatro alunos não responderam à questão. Isto pode dever-se ao facto de não terem tido tempo disponível para o fazer, mas também poderão ter tido dificuldades, não sabendo o que deveriam fazer para resolver a questão. No caso da segunda hipótese, estas dificuldades poderão estar relacionadas com a dificuldade da manipulação do limite e também com dificuldades relacionadas com a interpretação do conceito de função derivada e do que esta representa em cada ponto e como está relacionada com uma reta tangente a um gráfico de uma função.

**Em síntese**, esta questão analisada remete mais uma vez para a primeira questão de investigação e, tendo em conta as resoluções dos alunos apresentadas, verifica-se que a maioria não reconheceu a derivada como uma função que a cada valor do seu domínio corresponde o valor da derivada da função original nesse ponto.

Além do conceito de função derivada, esta questão também envolvia outro conceito: a interpretação geométrica de derivada num ponto. Relativamente a este conceito, os alunos evidenciam que reconhecem o declive da reta tangente ao gráfico de uma função num determinado ponto como a derivada dessa função nesse ponto, já que todos os que tentaram ou resolveram a questão, ou seja, a maioria da turma, usaram a expressão da função derivada ou a definição de derivada para determinar o declive da respetiva reta tangente. Considero que o facto de os alunos não revelarem dificuldades na interpretação geométrica da derivada pode estar relacionado com o trabalho que foi feito com o recurso à tecnologia quando este conceito foi lecionado. Como este conceito teve uma forte componente visual associada posteriormente à sua definição poderá ter sido determinante para a compreensão do mesmo (Domingos, 2003; Habre & Abboud, 2006; Zimmerman, 1991).

Embora os alunos saibam determinar a expressão algébrica da função derivada através das regras de derivação, alguns destes não a reconhecem para calcular o declive de uma reta tangente ao gráfico da função original num determinado ponto. Isto evidencia que muitos alunos assim que contactam com as regras de derivação parecem desconsiderar a definição de derivada num ponto (Gil, 2014).

No que diz respeito às dificuldades dos alunos que usaram a definição de derivada para determinar o declive da reta tangente ao gráfico da função, estas podem estar relacionadas com a manipulação da expressão com o limite e também, na conceptualização dos processos de limite subjacentes à noção de derivada (Orton, 1980, citado em Artigue, 1991).

Referindo-me ainda ao aluno que usou a calculadora gráfica para resolver esta questão, este pode evidenciar dificuldades na compreensão dos conceitos, pois muitas vezes os alunos recorrem à calculadora gráfica para resolver situações que não conseguem resolver analiticamente (Consciência, 2013).

Como esta foi a primeira questão que os alunos resolveram após contactarem com o conceito de função derivada era expectável que alguns destes não o usassem, embora a maioria dos alunos que resolveu a questão o tenha feito. Isto demonstra que nem todos alunos compreenderam o conceito, não conseguindo interpretá-lo corretamente em diferentes situações.

## 5.3. Ficha de trabalho nº 3 – Questão 5

Neste estudo é também importante analisar se os alunos reconhecem os pontos onde não existe derivada e a questão 5 da ficha de trabalho nº 3 (Anexo 2.7.) aborda esse assunto, questionando-os acerca do domínio da função derivada a partir da representação gráfica da função original, $g(x) = |4 - x^2|$. Nesta questão, os alunos a partir da representação gráfica da função, utilizando a calculadora gráfica teriam de identificar os dois pontos onde não existe derivada, $-2$ e $2$ e determinar o domínio da função derivada. De uma forma geral, os alunos não tiveram dificuldades com a utilização da calculadora gráfica e, como é possível verificar pela tabela seguinte (Tabela 4), a maioria conseguiu identificar corretamente o domínio da função derivada.

| **Resposta** | **N.º de Alunos** $(\boldsymbol{n = 12})$ | **% de Alunos** |
|---|---|---|
| Não responde | 2 | $16{,}6\%$ |
| Responde corretamente mas sem justificação | 5 | $41{,}7\%$ |
| Responde corretamente com justificação | 5 | $41{,}7\%$ |

**Tabela 4 - Respostas apresentadas pelos alunos à questão 5 da Ficha de trabalho nº 3**

Embora não tenha sido pedida justificação para esta questão, cinco alunos justificaram a sua resposta e apresentaram também um esboço da representação gráfica da função. É exemplo deste tipo de resposta a resolução das alunas Catarina e Sílvia que se pode observar na figura seguinte (Figura 15).

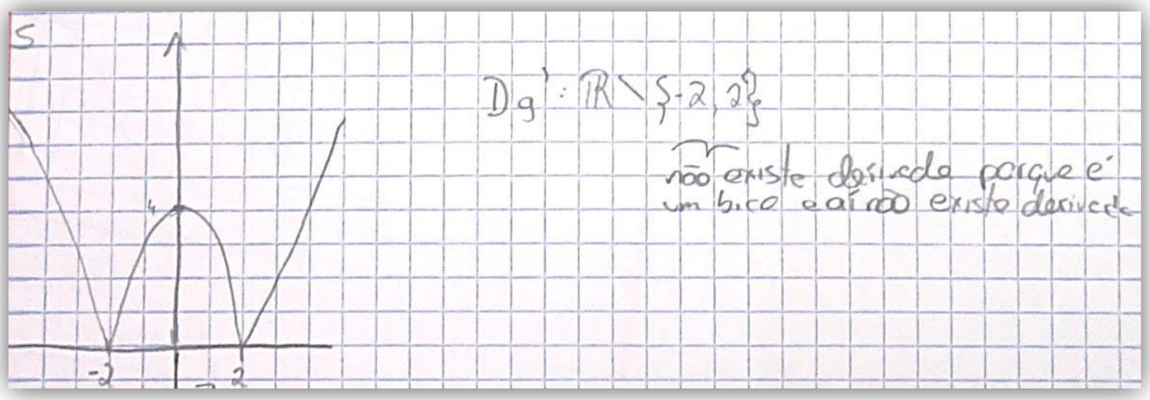


Figura 15 - Resposta da Catarina e da Sílvia à questão 5. da Ficha de trabalho nº 3

Como se pode ver, as alunas indicaram o domínio da função derivada corretamente e justificaram que os pontos de abcissa $-2$ e $2$ não fariam parte do domínio porque se tratam de "bicos" e, nesse caso, não existe derivada. Tenho de salientar que os alunos anteriormente, com o recurso ao GeoGebra tinham analisado algumas funções cuja representação gráfica evidenciava que existiam pontos onde não existia derivada. Embora no estudo desses exemplos tenha sido referido que esses pontos são chamados de "pontos angulosos", os alunos que justificaram a sua resposta não utilizaram esta expressão.

No caso dos alunos que indicaram o domínio embora sem justificação, considero que tenham compreendido o conceito de pontos angulosos, pois resolveram a questão sem grandes dificuldades identificando os pontos corretamente, como se pode ver na figura seguinte (Figura 16).

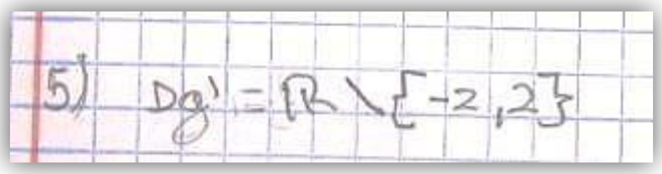


Figura 16 - Resposta do Carlos e do João à questão 5 da Ficha de trabalho nº 3

As duas alunas que não responderam à questão penso que não compreenderam o conceito de pontos angulosos, pois durante o seu trabalho autónomo tiveram dificuldades em perceber, a partir da representação gráfica da função na calculadora gráfica, os pontos onde não existe derivada. Devo dizer que este par questionou-me, após observarem a representação gráfica da função módulo, sobre a forma como poderiam determinar o domínio da função derivada a partir desta. Mesmo com o apoio dado, remetendo-as para o que tinha já sido falado sobre pontos onde não existe derivada, as alunas não conseguiram responder, pelo que poderão ter algumas dificuldades na visualização deste tipo de pontos. Considero que estas alunas poderão ter confundido os pontos onde não existe derivada com os pontos onde esta é zero. Desta forma, podem não ter compreendido totalmente o conceito de reta tangente a um gráfico de uma função e, consequentemente, quando esta existe e tem declive zero em oposição a quando não existe e portanto, não existe derivada nesse ponto, sendo necessário excluir esses pontos do conjunto que define o domínio da função derivada.

**Em síntese**, para este estudo, e tendo em conta o seu objetivo e as suas questões de investigação, é também importante analisar de que forma os alunos conseguem ser críticos na definição da função derivada, nomeadamente na determinação no seu domínio. A questão 5 abordava a função derivada de uma função módulo e o conceito de pontos angulosos, ou seja, pontos onde não existe derivada. Como os alunos até ao momento não possuem ferramentas analíticas para determinar se em determinado ponto existe ou não derivada, pois estas só serão abordadas no 12.º ano, a observação de várias representações gráficas, tal como sugere o Programa de Matemática A (ME, 2002), é fundamental para os alunos saberem identificar estes pontos.

De uma forma geral, tendo em conta as respostas dos alunos a esta questão posso dizer que estes conseguem sem grandes dificuldades identificar os pontos onde não existe derivada. Ao longo do seu trabalho autónomo estes recordaram o que foi feito nas aulas anteriores à resolução da questão 5, através do recurso GeoGebra que, tal como defendem Oliveira e Domingos (2008), é um recurso que "possibilita o trabalho simultâneo no ambiente geométrico e algébrico" (p. 282). Desta forma, os alunos puderam observar as sucessivas retas tangentes ao gráfico de algumas funções módulo e também a existência de pontos onde essa reta tangente não era possível definir.

Fazendo ainda uma referência às dificuldades das duas alunas que não conseguiram identificar os pontos onde não existe derivada, estas vão ao encontro do que referem Eisenberg e Dreyfus (1991, citados em Almeida & Viseu, 2002) quando defendem que estas dificuldades são de natureza cognitiva, pois uma representação visual tem uma grande concentração e complexidade de informação e, por isso, os alunos podem não recorrer a representações visuais para resolver determinadas questões.

## 5.4. Ficha de trabalho nº 2 – Questão 1

A questão 1 da ficha de trabalho nº 2 (Anexo 2.6.) permite analisar a compreensão que os alunos revelam da noção de função derivada na sua relação com a função original, um dos objetivos deste estudo. Ali é pedido aos alunos, em três alíneas distintas, que estudem a monotonia e a existência de extremos das funções recorrendo ao sinal da sua função derivada, utilizando métodos exclusivamente analíticos. Em aula foi apenas exigido aos alunos que realizassem as alíneas b) e c) e relativamente à primeira destas, de uma forma geral, não surgiram grandes dificuldades, tendo estes conseguido determinar a expressão algébrica da função derivada da função $g$, definida por $g(x) = -x + \frac{1}{x}$, e concluindo que esta é sempre positiva e que, portanto, a função original é sempre crescente.

As dificuldades que surgiram nesta questão dizem respeito à determinação dos zeros da função derivada, por se tratar de uma equação racional. Estas dificuldades podem ser um obstáculo para os alunos na resolução deste tipo de tarefas que envolvam a relação entre o sinal da função derivada e a monotonia da função original, pois podem não conclui-las devido a um estudo incompleto das funções envolvidas. Durante o trabalho autónomo, depois de ultrapassadas as dificuldades na determinação dos zeros da função derivada, os alunos conseguiram completar a sua resolução, o que mostra que no que diz respeito à relação entre a função derivada e a função original estes não revelam muitas dificuldades.

Relativamente à alínea c) apresenta-se, na tabela seguinte (Tabela 5), o número de alunos que realizou cada um dos passos conducentes à resolução bem-sucedida desta questão.

| **Resposta** | **Nº de Alunos ($n = 13$)** | **% de Alunos** |
|---|---|---|
| Escreve a função módulo sem o símbolo de módulo | 13 | 100% |
| Determina a expressão algébrica da função derivada | 8 | 61,5% |
| Estuda a função derivada quanto ao seu domínio e zeros | 7 | 53,8% |
| Faz o quadro com a variação do sinal da função derivada e a respetiva variação de monotonia da função original | 9 | 69,2% |
| Determina os extremos da função original | 5 | 38,5% |
| Dá resposta completa à questão | 2 | 15,4% |

**Tabela 5 - Etapas da resolução da questão 1-c) da Ficha de trabalho nº 2**

Como se pode verificar pela tabela anterior, todos os alunos conseguiram escrever a função módulo como uma função definida por ramos, tendo as dificuldades surgido na determinação da expressão algébrica da função derivada. Verifiquei nas suas resoluções que, a partir do momento que os alunos determinaram a função módulo sem o símbolo de módulo, consideraram esta como a função derivada, fazendo o estudo do sinal a partir desta representação, como podemos ver na figura seguinte (Figura 17).

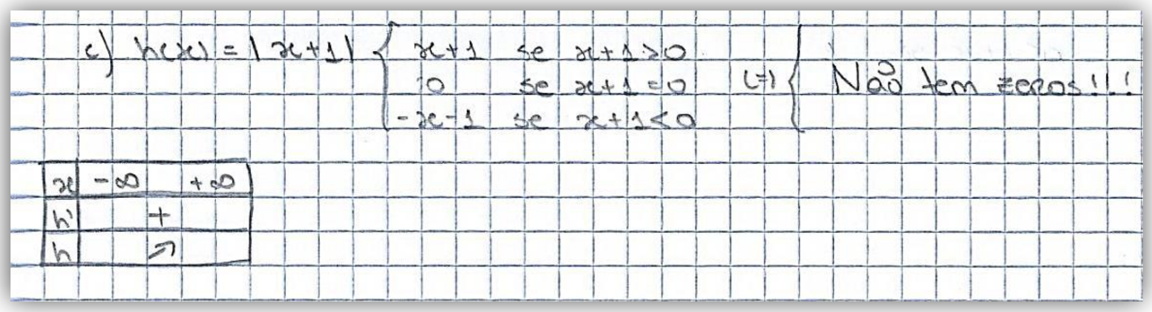
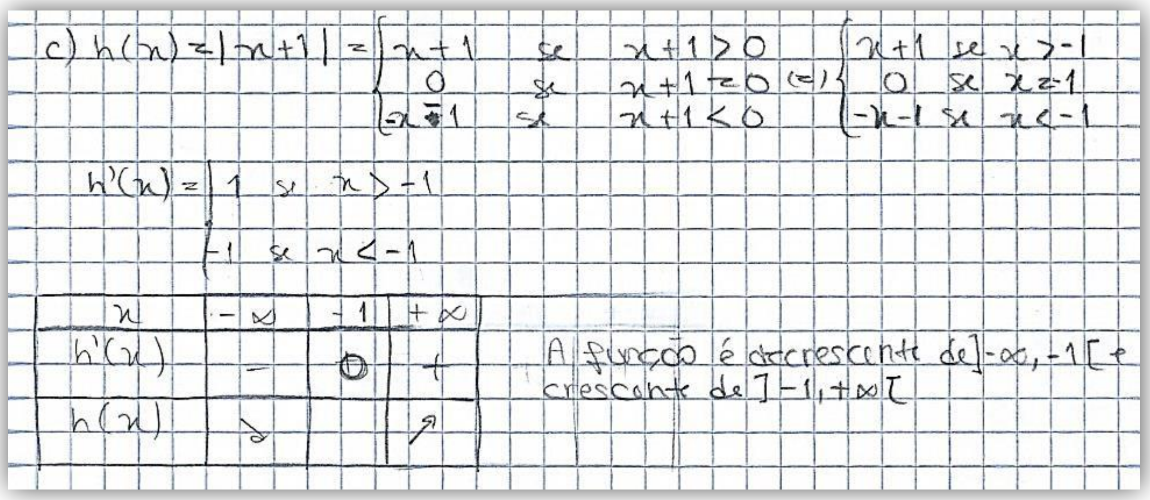



**Figura 17 - Resposta da Margarida e da Helena à questão 1-c) da Ficha de trabalho nº 2**

Estas alunas possivelmente não conseguiram estender a noção de função derivada a este novo tipo de funções, pois não a determinaram. Além disso, podemos ver que as alunas tiveram dificuldades em fazer o estudo da função, pois referem que esta não tem zeros. Esta dificuldade pode estar relacionada com o facto de os alunos não estarem muito familiarizados com a representação algébrica de uma função definida por ramos. É interessante perceber que estas alunas fazem o quadro de sinais usando $h'$ e $h$ embora não tenham determinado a função derivada e além disso, indicam que a função é sempre positiva não mostrando qualquer cálculo.

Como se pode ver pela tabela anterior, o número de alunos que estudou corretamente a função derivada relativamente ao seu domínio e à existência ou não de zeros é menor do que os que fizeram o quadro de sinais. Isso possivelmente deve-se ao facto de os alunos saberem que neste tipo de questões têm de fazer o quadro de sinais, mas têm maiores dificuldades no estudo das funções. A figura seguinte (Figura 18) mostra uma dessas resoluções, onde as alunas fizeram um quadro de sinais embora tenham estudado incorretamente a função derivada.



c) $h(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x+1>0 \\ 0 & \text{se } x+1=0 \\ -x-1 & \text{se } x+1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 & \text{se } x>-1 \\ 0 & \text{se } x=-1 \\ -x-1 & \text{se } x<-1 \end{cases}$

$h'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x>-1 \\ -1 & \text{se } x<-1 \end{cases}$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $h(x)$ | ↘ | | ↗ |

A função é decrescente de $]-\infty,-1[$ e crescente de $]-1,+\infty[$

**Figura 18 - Resposta da Sara e da Nicole à questão 1-c) da Ficha de trabalho nº 2**

Estas alunas, no quadro de sinais, indicaram que a derivada tinha um zero embora tenham determinado corretamente a expressão algébrica da mesma, onde é visível que esta não está definida para $x = -1$. Considero que isto se deva ao facto de nas tarefas anteriores com questões semelhantes existem sempre zeros da derivada e, neste caso, as alunas tenham assumido que para esta abcissa a derivada teria que ser zero pois era onde mudava de sinal.

Ainda relativamente a esta questão foi interessante perceber que alguns alunos estudaram corretamente o sinal da função derivada e consequentemente a variação de monotonia da função original, mas não determinaram o extremo da última. É exemplo disso a figura anterior, como também a figura seguinte (Figura 19) onde a Cláudia faz o quadro de sinais corretamente, mas tira conclusões apenas para a função derivada e não para a função original.

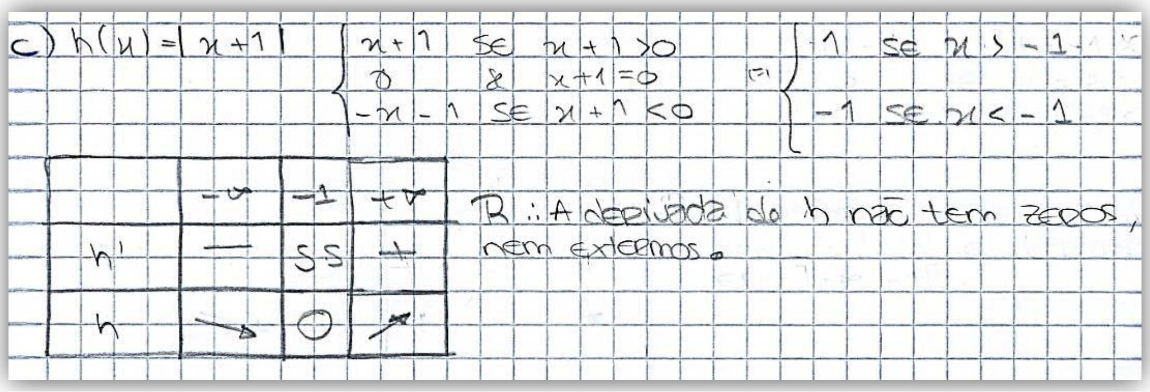



**Figura 19 - Resposta da Cláudia à questão 1-c) da Ficha de trabalho nº 2**

Esta aluna tem alguns erros na sua resolução, nomeadamente quando escreve a expressão analítica da função derivada indicando-a após a função original, depois de um sinal de equivalência, mas como acompanhei o seu trabalho autónomo considero que ela compreendeu a função derivada da função módulo. Fez também corretamente o estudo do sinal da função derivada e da monotonia da função original, mas não determinou o extremo da última nem concluiu em que intervalo esta era crescente ou decrescente, tal como era pedido na questão.

Em último lugar gostaria de referir que os alunos muitas vezes não dão uma resposta às questões que lhes são colocadas e apenas dois o fizeram, tal como mostra a Tabela 5. Na figura seguinte (Figura 20) encontra-se uma resolução correta e completa a esta questão.

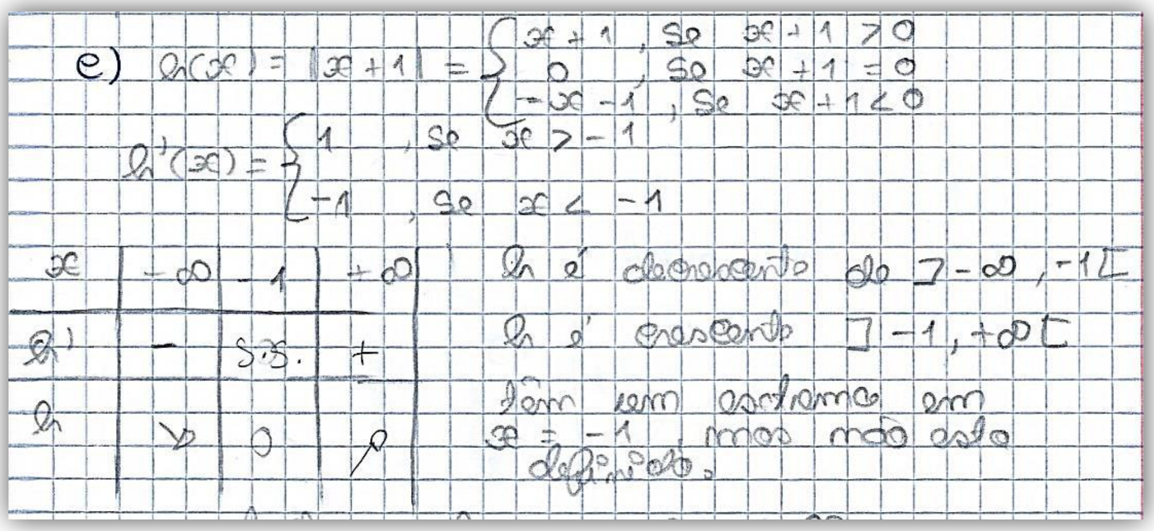



**Figura 20 - Resposta do Guilherme à questão 1-c) da Ficha de trabalho nº 2**

Nesta resolução devo apenas referir ainda que o aluno quando responde relativamente à existência de um extremo que "…mas não está definida", embora pareça que se esteja a referir à função original está na realidade a referir-se à função derivada. Como durante o trabalho autónomo este aluno me questionou se teria de responder que a derivada não estava definida para $x = -1$, considero que este apenas não formulou da forma mais correta a sua resposta.

**Em síntese**, a análise desta questão remete-nos para todas as questões de investigação, em particular na relação entre a função derivada e a função original, representadas algebricamente. Relativamente à primeira questão de investigação que diz respeito à compreensão da função derivada, posso dizer que os alunos ainda revelam algumas dificuldades neste conceito, nomeadamente na determinação do seu domínio, pois não são muitos críticos relativamente aos pontos onde não existe derivada. Esta dificuldade ficou clara quando estes resolveram a tarefa usando os procedimentos que tinham aprendido como uma "receita", não realizando um estudo completo da função derivada.

Relativamente à relação que se estabelece entre a função derivada e a função original considero que a maioria dos alunos a compreendeu, pois sabem que quando a função derivada é positiva a função original é estritamente crescente e quando é negativa a função original é estritamente decrescente. No que diz respeito à determinação dos extremos os alunos revelam mais dificuldades, muitas vezes esquecendo que têm que os determinar.

Desta forma, de um modo geral os alunos usam o estudo do sinal da função derivada para estudar as propriedades da função original, revelando um razoável domínio no cálculo de derivadas sobretudo para funções mais simples, como as funções polinomiais (Orton, 1980, citado em Artigue, 1991), surgindo as maiores dificuldades em funções não polinomiais, nomeadamente na função módulo.

## 5.5. Ficha de trabalho nº 3 – Questão 1

Uma das questões de investigação deste estudo diz respeito à forma como os alunos usam o seu conhecimento sobre a função derivada para analisar as propriedades da função original e a questão 1 da Ficha de trabalho nº 3 (Anexo 2.7.) aborda esse aspeto. Nesta questão os alunos teriam que determinar a expressão algébrica de uma função quadrática que passa num determinado ponto, a partir da expressão algébrica da sua função derivada.

Todos os alunos resolveram corretamente esta questão e foi interessante perceber que, de imediato, todos começaram a resolvê-la usando as regras de derivação em sentido inverso. Durante o trabalho autónomo alguns alunos questionaram-me sobre a utilidade do ponto $(1,190)$, mas rapidamente compreenderam que sem este ponto existiria uma infinidade de funções cuja função derivada seria a do enunciado da questão. Na figura seguinte (Figura 21) é possível observar a resolução da Margarida e Helena que é representativa das resoluções da quase totalidade dos alunos.

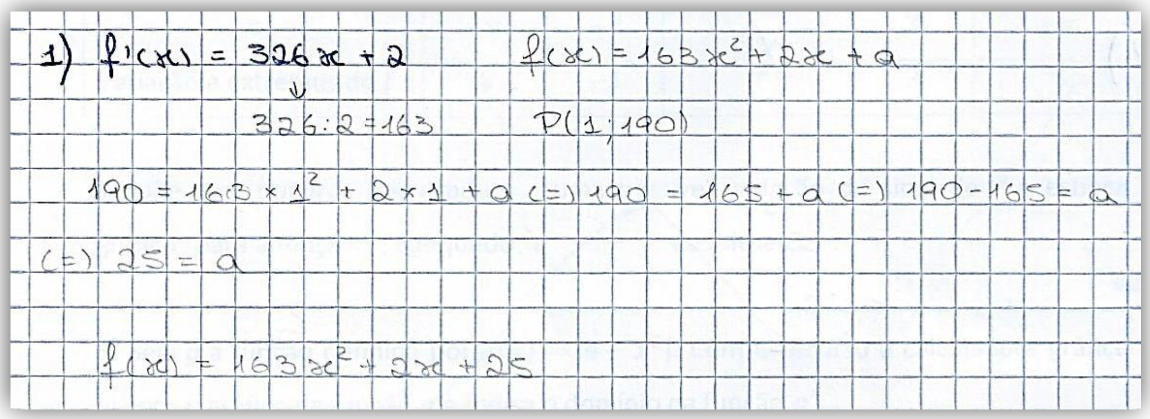
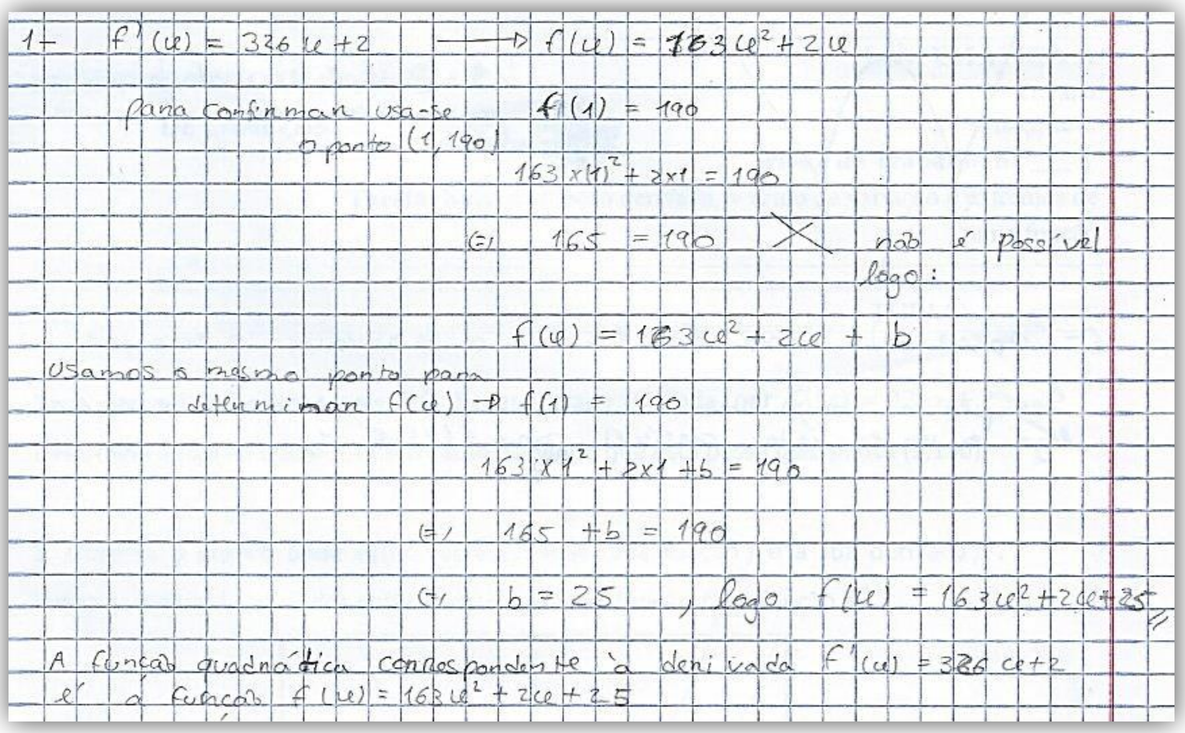



**Figura 21 - Resposta da Margarida e da Helena à questão 1 da Ficha de trabalho nº 3**

Podemos ver que estas alunas e a maioria dos alunos pensaram do seguinte modo: como tinham um fator de grau um, $326x$ significava que o número 326 seria resultado da multiplicação de um determinado número por dois, que diz respeito ao grau da função quadrática. Assim, dividiram $326$ por dois para determinar o coeficiente do termo de grau dois da expressão algébrica da função original. De seguida, como tinham a constante $2$ na expressão algébrica da função derivada, fizeram um raciocínio semelhante ao anterior e determinaram o coeficiente do termo de grau um da expressão algébrica da função. Por último, usaram o ponto indicado no enunciado para determinar o termo independente que poderia existir na função quadrática a encontrar.

Nesta questão gostaria ainda de referir a resolução do Bruno que para determinar o termo independente da função quadrática usou outro raciocínio, como mostra a figura seguinte (Figura 22).



1- $f'(x) = 326x + 2 \longrightarrow f(x) = 163x^2 + 2x$

para confirmar usa-se o ponto $(1, 190)$ $f(1) = 190$

$163 \times (1)^2 + 2 \times 1 = 190$

$\Leftrightarrow 165 = 190$ não é possível

logo:

$f(x) = 163x^2 + 2x + b$

Usamos o mesmo ponto para determinar $f(x) \rightarrow f(1) = 190$

$163 \times 1^2 + 2 \times 1 + b = 190$

$\Leftrightarrow 165 + b = 190$

$\Leftrightarrow b = 25$, logo $f(x) = 163x^2 + 2x + 25$

A função quadrática correspondente à derivada $f'(x) = 326x + 2$ é a função $f(x) = 163x^2 + 2x + 25$

**Figura 22 - Resposta do Bruno à questão 1 da Ficha de trabalho nº 3**

Este aluno também usou o ponto dado no enunciado mas, em primeiro lugar, usou-o na expressão quadrática incompleta. Com este cálculo, o Bruno verificou que, com aquele ponto e expressão obteria uma afirmação falsa, pelo que a expressão teria que ter um termo independente. Durante o trabalho autónomo questionei-o sobre este método e este disse-me que usando o ponto na expressão incompleta saberia automaticamente o termo independente em falta, que seria $25$ pois, $190 - 165 = 25$ e que apenas faz a segunda parte do cálculo para justificar esse valor. O aluno afirmou ainda que quando a afirmação é verdadeira, o termo independente é zero.

**Em síntese**, a análise desta questão remete-nos para a segunda questão de investigação que diz respeito à relação que se estabelece entre a função derivada e a função original, neste caso, estudar a expressão algébrica função original a partir da expressão algébrica da função derivada.

Foi interessante perceber que os alunos conseguem fazer o raciocínio inverso ao que habitualmente realizam quando utilizam as regras de derivação, pois muitas vezes determinam a expressão algébrica da função derivada a partir da função original. Tratando-se de uma primitivação simples pensei que haveria mais dificuldades por parte dos alunos, mas com satisfação percebi que isso não aconteceu, o que indica que compreenderam estas regras de derivação simples.

Relativamente às dificuldades sentidas pelos alunos nesta questão, há a referir a determinação de um possível termo independente da função quadrática. Alguns alunos determinaram a expressão incompleta da função original, não percebendo autonomamente que o ponto dado no enunciado determinava a função em causa. Esta dificuldade era expectável, pois os alunos sabem determinar a expressão algébrica da função derivada de uma determinada função, mas até realizarem esta tarefa considero que não tinham compreendido que uma mesma expressão de uma função derivada pode ser obtida a partir de uma infinidade de funções originais.

## 5.6. Ficha de trabalho nº 2 – Questão 4

Para esta análise, tendo em conta o objetivo deste estudo, foi importante considerar um problema de otimização para tentar perceber se os alunos utilizam os seus conhecimentos sobre a relação entre a função derivada e a função original e se o utilizam, de que forma. A questão 4 da ficha de trabalho nº 2 (Anexo 2.6.) trata-se de um problema de otimização equacionado com uma função de terceiro grau, onde esta representa a percentagem de uma população infetada com uma doença contagiosa ao longo de 30 dias e onde se pretendia que os alunos determinassem o dia em que foi máxima a percentagem de pessoas infetadas. Devido ao facto deste problema de otimização estar inserido nesta ficha de trabalho seria de esperar que os alunos aplicassem os seus conhecimentos sobre a determinação de um máximo de uma função através do estudo do sinal da sua função derivada, mas como podemos ver pela tabela seguinte (Tabela 6), na maioria dos casos isso não aconteceu.

| **Resposta** | **N.º de Alunos ($n = 13$)** | **% de Alunos** |
|---|---|---|
| Recorreu à expressão algébrica da função derivada | 4 | 30,8% |
| Recorreu à calculadora gráfica | 6 | 46,1% |
| Não conclui a questão | 3 | 23,1% |

**Tabela 6 - Respostas apresentadas pelos alunos à questão 4 da Ficha de trabalho nº 2**

Como se pode verificar pela tabela, apenas quatro alunos recorreram à expressão algébrica da função derivada para determinar o máximo da função original. A figura seguinte (Figura 23) é a resolução da Sofia que resolveu a questão através da função derivada.

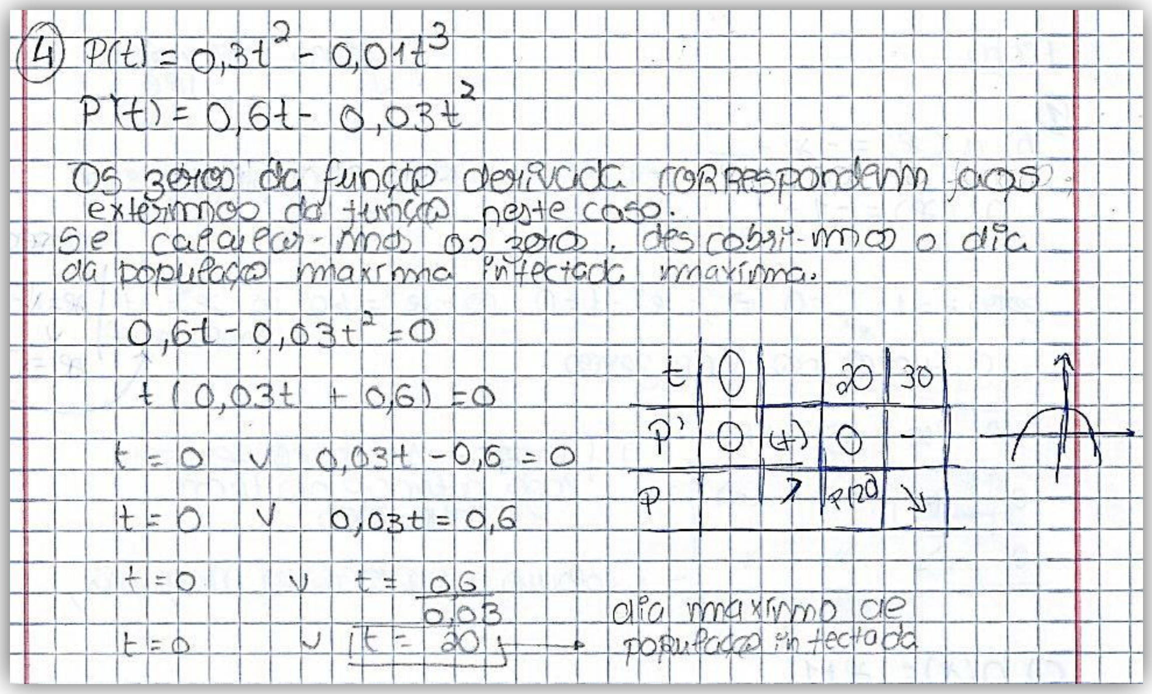



**Figura 23 - Resposta da Sofia à questão 4 da Ficha de trabalho nº 2**

Pela resolução da Sofia[2] é possível verificar que determinou corretamente a expressão algébrica da função derivada e o que apresenta de seguida é muito interessante, pois justifica o que vai fazer com esta expressão dizendo que os zeros da função derivada correspondem aos extremos da função "neste caso".

[2] O quadro de sinais e a representação gráfica apresentada nesta figura diz respeito à correção feita pela Sofia, posteriormente quando foi feita a apresentação dos resultados.

Embora a aluna tenha escrito “neste caso” não é percetível se esta de facto compreende porque é que os zeros da derivada correspondem aos extremos da função. De seguida, a Sofia determina os zeros da função derivada e obtém duas soluções indicando que a resposta ao problema é ao vigésimo dia.

Foi interessante perceber que a aluna não sentiu necessidade de fazer um quadro de sinais para tirar conclusões sobre o dia em que a percentagem máxima de pessoas infetadas seria o vigésimo. De facto a solução da Sofia está correta, embora a sua resolução e justificações não estejam. Esta aluna não estudou o sinal da função derivada, pelo que não poderia concluir sobre a existência de extremos da função original. Isto pode evidenciar que os alunos poderão não ter compreendido ou apreendido as condições necessárias para a existência de extremos de uma função, a partir do estudo da sua função derivada. Pelo que a aluna apresentou não é claro se terá compreendido totalmente estas questões até porque faz a correção da sua resposta completando-a precisamente com o quadro de sinais e com a representação gráfica da função derivada, para a ajudar a estudar o seu sinal.

Como referi acima apenas quatro alunos recorreram à expressão algébrica da função derivada, mas não foi apenas a Sofia que recorreu a este método, sem utilizar o quadro de sinais e de variação de monotonia da função original. Na figura seguinte (Figura 24) apresento a resolução da Sílvia a este problema.

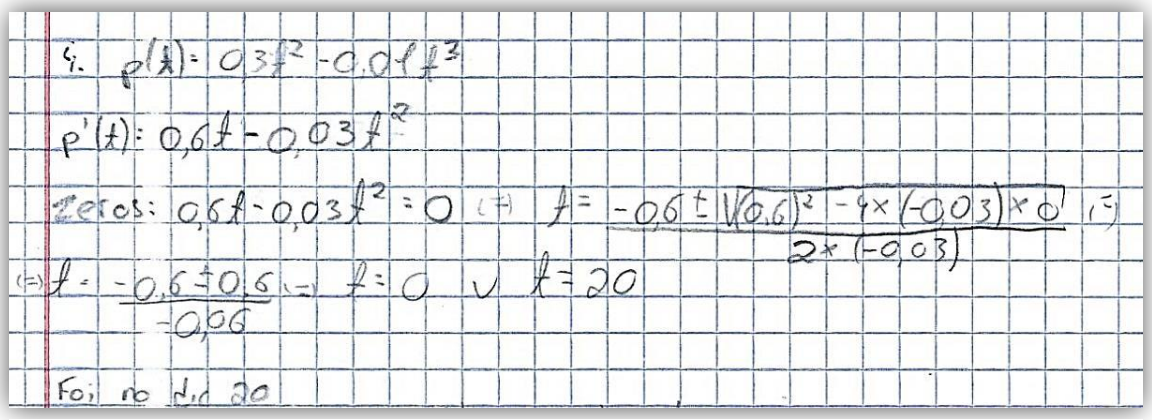
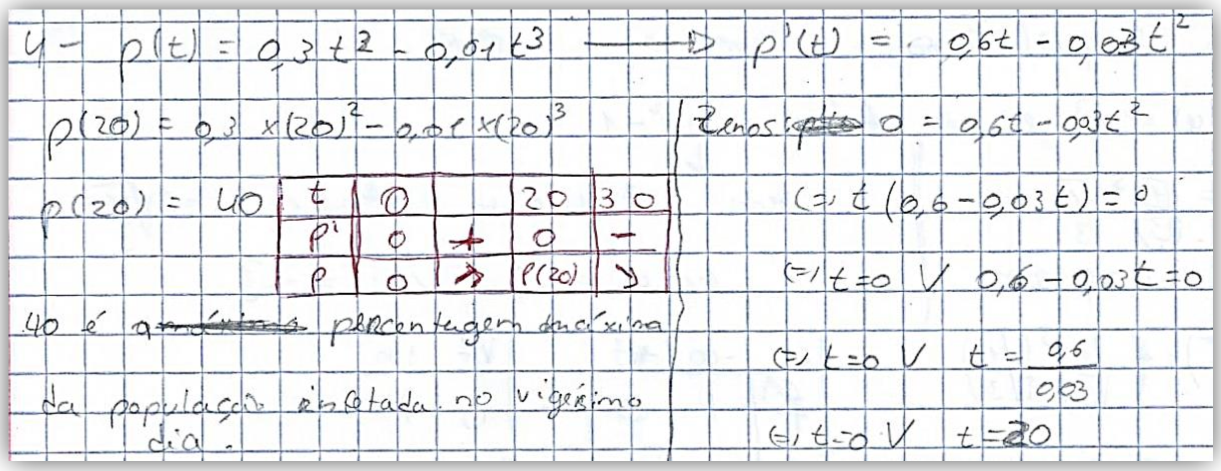



**Figura 24 - Resposta da Sílvia à questão 4 da Ficha de trabalho nº 2**

Como a Sofia, também a Sílvia determinou corretamente a expressão da função derivada e calculou os seus zeros, indicando que o vigésimo dia seria a resposta à questão. A diferença é que esta aluna não justificou os seus cálculos, nomeadamente a determinação dos zeros da função derivada e portanto não é claro que tenha compreendido completamente a relação entre a função derivada e a função original.

Ainda relativamente aos alunos que recorreram à expressão da função derivada a figura seguinte (Figura 25) mostra a resolução do Bruno[3], que embora tenha feito o mesmo processo das suas colegas dá uma resposta que não responde ao que é pedido no problema.



4 - $p(t) = 0{,}3t^2 - 0{,}01t^3 \longrightarrow p'(t) = 0{,}6t - 0{,}03t^2$

$p(20) = 0{,}3 \times (20)^2 - 0{,}01 \times (20)^3$

$p(20) = 40$

| $t$ | 0 | | 20 | 30 |
|---|---|---|---|---|
| $p'$ | 0 | + | 0 | − |
| $p$ | 0 | ↗ | $p(20)$ | ↘ |

40 é a percentagem máxima da população afetada no vigésimo dia.

Zeros: $0 = 0{,}6t - 0{,}03t^2$

$\Leftrightarrow t(0{,}6 - 0{,}03t) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee 0{,}6 - 0{,}03t = 0$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{0{,}6}{0{,}03}$

$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 20$

**Figura 25 - Resposta do Bruno à questão 4 da Ficha de trabalho nº 2**

Mais uma vez, este aluno determina corretamente a expressão algébrica da função derivada e calcula os seus zeros. Posteriormente determina a ordenada correspondente à abcissa 20 e obtém o valor 40 e responde que esta é a percentagem máxima da população infetada no vigésimo dia. Este aluno embora não tenha nenhum erro nos seus cálculos não dá uma resposta totalmente de acordo ao que é pedido nesta questão, o que poderá evidenciar não ter compreendido completamente o contexto do problema e o significado das variáveis envolvidas.

Relativamente aos alunos que recorreram à calculadora gráfica, a figura seguinte (Figura 26) mostra uma dessas resoluções, das alunas Nicole e Sara.

[3] O quadro de sinais que está representado na figura foi feito após a correção desta questão.

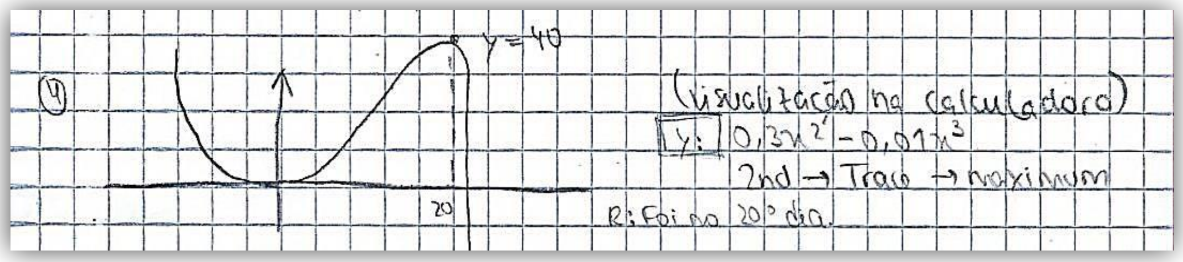
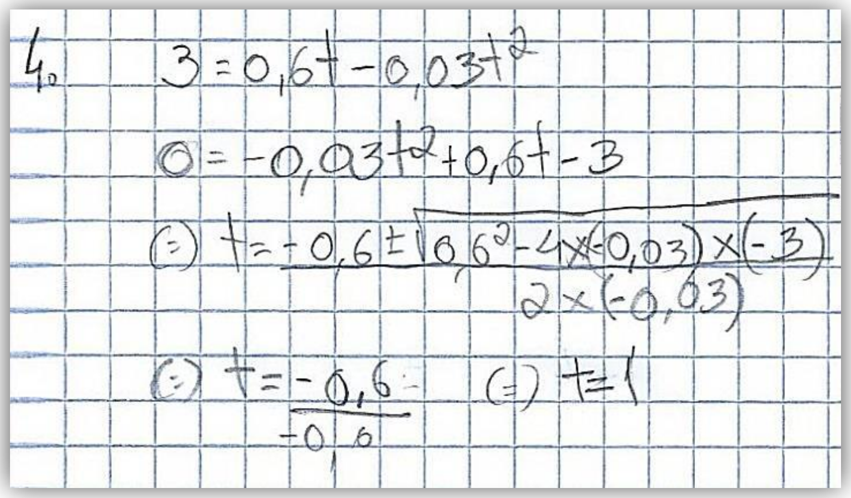



**Figura 26 - Resposta da Nicole e da Sara à questão 4 da Ficha de trabalho nº 2**

Estas alunas, na sua resolução apresentam uma representação gráfica da função que visualizaram na calculadora gráfica e indicam os passos que seguiram para determinar o ponto máximo da função com este recurso. Devo referir que alguns pares que resolveram esta questão com o recurso à calculadora gráfica questionaram-me sobre o valor que seria a resposta ao problema, pois quando calcularam o ponto máximo a calculadora devolveu dois valores, uma abcissa, 20, e a ordenada correspondente, 40. Relembrando-lhes o contexto do problema e como estava definida a função, os alunos não tiveram dúvidas em escolher a abcissa 20.

A Tabela 6 também mostra que três alunos não concluíram esta questão. Todos eles tiveram dificuldades na determinação dos zeros da função derivada e acabaram por abandonar a resolução da questão. A figura seguinte (Figura 27) mostra um exemplo destes três alunos, com a resolução do Fábio.



4.

$3 = 0,6t - 0,03t^2$

$0 = -0,03t^2 + 0,6t - 3$

$\Leftrightarrow t = \frac{-0,6 \pm \sqrt{0,6^2 - 4\times(-0,03)\times(-3)}}{2\times(-0,03)}$

$\Leftrightarrow t = \frac{-0,6}{-0,6} \quad \Leftrightarrow t = 1$

**Figura 27 - Resposta do Fábio à questão 4 da Ficha de trabalho nº 2**

O Fábio escreve a expressão algébrica da função derivada mas iguala-a a três. Este erro poderá ter sido uma distração, mas acabou por determinar uma outra função e foi em relação a esta última que calculou os zeros. Após este cálculo o aluno não continuou a sua resolução, possivelmente por não ter compreendido a questão ou pelo que obteve quando determinou os zeros.

**Em síntese**, um problema de otimização insere-se neste estudo no que diz respeito às estratégias que utilizam para o resolver, em particular se o resolvem com o recurso ao estudo do sinal da função derivada e variação de monotonia da função original. Embora os alunos quando resolveram esta questão já tinham realizado outras tarefas onde esta relação tinha sido estudada, a maioria dos alunos preferiu recorrer à calculadora gráfica para a resolver, sem qualquer sugestão e nem equacionando recorrer a um método analítico. Considero que uma das razões que poderá justificar esta opção pela calculadora gráfica prende-se com o facto de esta questão ter um contexto e os alunos não associarem a existência de uma função derivada à função dada no enunciado. Além disso, nem sempre o recurso à calculadora gráfica deve-se a dificuldades na resolução de determinadas situações, por processos analíticos, mas também para “analisar a situação a partir da representação gráfica da função envolvida (…) e para explorar determinadas situações problemáticas” (Consciência, 2013, p. 494).

Os alunos que recorreram à calculadora gráfica não revelaram dificuldades, determinando a resposta ao problema de uma forma correta e contextualizada. Um problema caracteriza-se por ter várias estratégias de resolução, mas interessa refletir sobre o porquê de os alunos não terem recorrido à relação entre a função derivada e a função original.

Relativamente aos alunos que recorreram à expressão algébrica da função derivada mas não estudaram o seu sinal, determinando apenas os zeros desta, indicando que estes seriam os extremos da função, evidencia-se que o poderão ter feito apenas como um procedimento que já tinham realizado anteriormente, não compreendendo o significado da relação entre a função derivada e função original.

Devo referir ainda que surgiram algumas dificuldades nos cálculos para a determinação dos zeros da função derivada, embora esta seja uma função do segundo grau. Este tipo de dificuldades fez com que os alunos abandonassem o exercício, não permitindo perceber se estes compreendem a relação que se estabelece entre a função derivada e a função original.

## 5.7. Ficha de trabalho nº 3 – Questão 2

A questão 2 da ficha de trabalho nº 3 (Anexo 2.7.) aborda a relação entre a representação gráfica da função derivada e a da função original. Os alunos nesta questão teriam que identificar qual seria a representação gráfica correspondente a cada uma das funções. Nesta questão todos os alunos identificaram corretamente as funções em causa, mas os raciocínios utilizados foram distintos. A tabela seguinte (Tabela 7) mostra os vários tipos de justificações dadas pelos alunos para resolverem esta questão.

| **Resposta** | **Nº de Alunos** $(n = 12)$ | % **de Alunos** |
|---|---|---|
| Recorrendo à relação entre o sinal da função derivada e monotonia da função original | 7 | 58,3% |
| Recorrendo às regras de derivação | 4 | 33,3% |
| Recorrendo ao número de zeros das funções | 1 | 8,3% |

**Tabela 7 - Respostas dadas pelos alunos à questão 2 da Ficha de trabalho nº 3**

Como se pode verificar, mais de 50% dos alunos recorreu à relação entre o sinal da função derivada e a monotonia da função original e a maioria destes conseguiu resolver e justificar corretamente esta questão. A figura seguinte (Figura 28) mostra um exemplo deste tipo de resolução, bem justificada, feita pelos alunos Carlos e João.

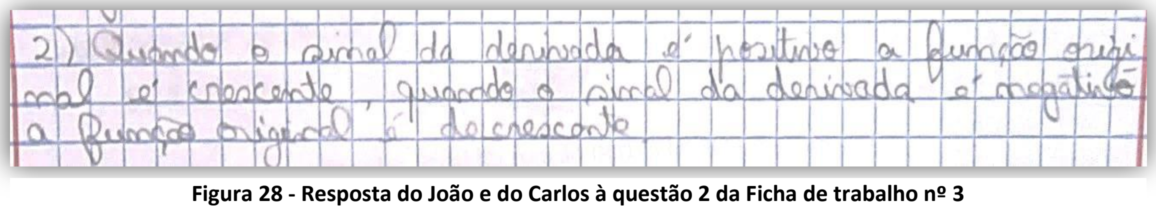

2) Quando o sinal da derivada é positivo a função original é crescente, quando o sinal da derivada é negativo a função original é decrescente

**Figura 28 - Resposta do João e do Carlos à questão 2 da Ficha de trabalho nº 3**

Esta resolução mostra que os alunos conseguiram, através da visualização da representação gráfica das duas funções estudar o seu sinal e a sua variação de monotonia para determinar qual seria a função derivada e a função original. De seguida, apresento a resolução do Henrique (Figura 29) que também recorreu à relação entre o sinal da função derivada e a monotonia da função original, mas que a sua justificação não é totalmente esclarecedora quanto à sua compreensão desta relação.

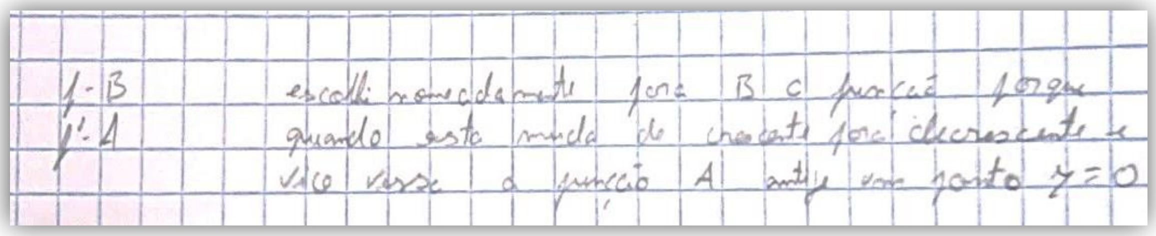
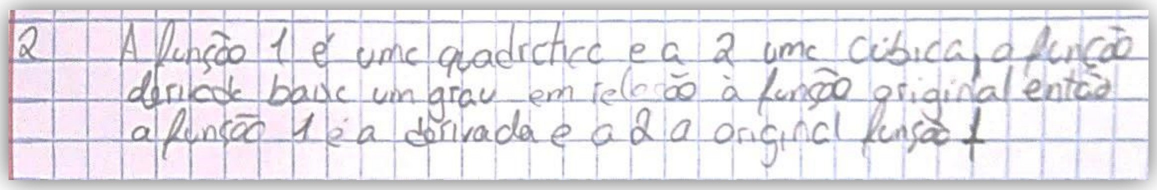

f - B escolhi nomeadamente para B a função porque
f' - A quando esta muda de crescente para decrescente e
vice versa a função A atinge um ponto y=0

**Figura 29 - Resposta do Henrique à questão 2 da Ficha de trabalho nº 3**

Considero que o Henrique quando se refere que a função A, que neste caso trata-se da função derivada, atinge um ponto "$y = 0$" na mudança de monotonia da função original diz respeito a um dos zeros da função derivada. O Henrique expressa aqui a ideia de que quando se dá uma mudança de monotonia da função original, a função derivada atinge um zero. Embora esta justificação não seja a mais clara, na minha opinião o Henrique compreendeu o que estava em causa e consegue relacionar estas duas funções, através da sua representação gráfica.

Relativamente aos alunos que recorreram às regras de derivação fizeram-no com os conhecimentos que tinham sobre a diminuição do grau das funções polinomiais, em uma unidade, na determinação da sua função derivada. Além disso, houve também alunos que usaram o seu conhecimento das regras de derivação nomeadamente no caso da função quadrática, para determinarem que esta última não poderia ser a função original.

Vejamos em primeiro lugar um exemplo de uma resolução (Figura 30), feita pelas alunas Sílvia e Catarina que usaram o primeiro raciocínio descrito anteriormente.

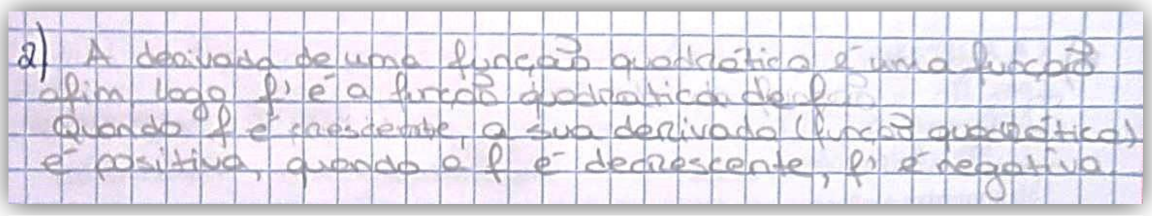


2 A função 1 é uma quadrática e a 2 uma cúbica, a função derivada baixa um grau em relação à função original então a função 1 é a derivada e a 2 a original função f

**Figura 30 - Resposta da Sílvia e da Catarina à questão 2 da Ficha de trabalho nº 3**

Pelo que se pode ver nesta resolução, as alunas identificaram em primeiro lugar que as representações gráficas que tinham no enunciado correspondiam a uma função quadrática e uma cúbica, pelo que a de maior grau teria de ser a função original, pois pelas regras de derivação é isso que acontece quando é determinada a função derivada. É uma resolução interessante pois mostra que estas alunas relacionam o que conhecem analiticamente, as regras de derivação, e aquilo que observaram pelas representações gráficas das funções. Além disso, mostra que estas alunas reconhecem também estas funções polinomiais através das suas representações gráficas.

A figura seguinte (Figura 31) é exemplo do segundo raciocínio que tinha descrito anteriormente, onde a aluna Margarida usa os seus conhecimentos sobre a função derivada da função quadrática.



2) A derivada de uma função quadrática é uma função afim logo f' é a função quadrática de f. Quando f é crescente, a sua derivada (função quadrática) é positiva, quando a f é decrescente, f' é negativa

**Figura 31 - Resposta da Margarida à questão 2 da Ficha de trabalho nº 3**

Nesta resolução é possível verificar que a Margarida reconhece a derivada de uma função quadrática como uma função afim e como não existia uma representação gráfica de uma função deste tipo a função quadrática não poderia ser considerada a função derivada. Além deste raciocínio, a Margarida também usa a relação entre a função derivada e a função original.

Há ainda a destacar a resolução apresentada na Tabela 7 em que o aluno recorreu ao número de zeros das funções da questão 2. A figura seguinte (Figura 32) mostra essa resolução feita pelo aluno Fábio.

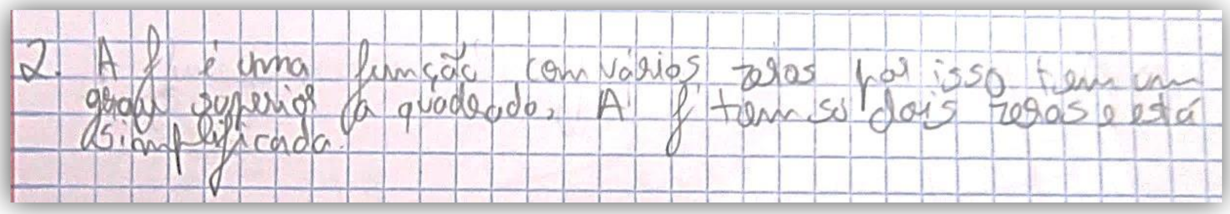

2. A f é uma função com vários zeros por isso tem um grau superior à quadrado, A f' tem só dois zeros e está simplificada

**Figura 32 - Resposta do Fábio à questão 2 da Ficha de trabalho nº 3**

Este aluno apresentou uma justificação a que mais ninguém recorreu, pois identificou as funções polinomiais de maior e de menor grau, tendo em conta o número de zeros destas. Também considero que além de estudar o número de zeros das funções, este aluno recorreu às regras de derivação que conhece quando diz que a função tem grau superior. Não é tão clara a segunda parte da resposta do Fábio quando este diz que a função derivada só tem dois zeros e "está simplificada", mas considero que esta expressão diz respeito precisamente ao menor grau que esta função polinomial tem e por isso ser mais "simples" que a função original.

**Em síntese**, esta questão analisada aborda um assunto que está relacionado, mais uma vez, com a relação entre a função derivada e a função original, nomeadamente nas suas representações gráficas. De uma forma geral, considero que os alunos compreendem a relação entre o sinal da função derivada e a variação de monotonia da função original a partir da sua representação gráfica. Pelo que analisei nesta questão, todos os alunos que responderam à questão a partir desta relação justificaram as suas respostas de forma completa, o que evidencia que não veem apenas estas funções como expressões algébricas, mas que as suas representações gráficas também apresentam esta relação.

Foi interessante perceber que os alunos conhecem as representações gráficas das funções polinomiais do segundo e terceiro graus e utilizam este conhecimento aliado às regras de derivação que aprenderam na unidade didática. Isto evidencia que os alunos conseguem relacionar as regras de derivação que lhes foram apresentadas através de expressões algébricas com as representações gráficas das funções derivadas e funções originais, e que o estabelecimento de conexões entre estas duas representações é determinante para a análise das propriedades da função derivada num intervalo (Park, 2015) e consequentemente da função original.

## 5.8. Ficha de trabalho nº 2 – Questão 5

Tendo em conta as questões de investigação deste estudo nomeadamente a que diz respeito à forma como os alunos usam o seu conhecimento sobre a função original para analisar as propriedades da função derivada, surge a análise da questão 5 da ficha de trabalho nº 2 (Anexo 2.6.). Nesta questão, que está dividida em três alíneas, é apresentado aos alunos a representação gráfica da função original e pretende-se que estes tirem algumas conclusões sobre determinadas propriedades da sua função derivada.

Na alínea a) os alunos teriam que indicar um intervalo onde a função derivada fosse nula e, de uma forma geral, surgiram algumas dificuldades, pois apenas cerca de 50% destes respondeu corretamente à questão. A tabela seguinte (Tabela 8) faz uma síntese das respostas dadas pelos alunos.

| **Resposta** | **N.º de Alunos ($n = 12$)** | **% de Alunos** |
|---|---|---|
| Responde corretamente com justificação | 4 | 33,3% |
| Responde corretamente sem justificação | 2 | 16,7% |
| Responde incorretamente | 3 | 25% |
| Não responde | 3 | 25% |

**Tabela 8 - Respostas dos alunos à questão 5 – a) da Ficha de trabalho nº 2**

Como é possível verificar pela Tabela 8, embora não fosse pedido nesta alínea, quatro alunos responderam corretamente, justificando a sua escolha. A figura seguinte (Figura 33) é um dos exemplos desta resolução, apresentada pela aluna Helena.

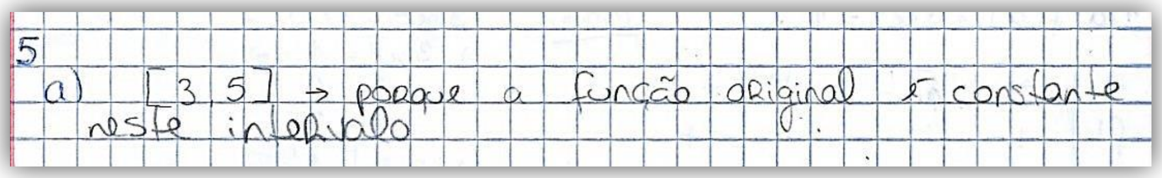



**Figura 33 - Resposta da Helena à questão 5 – a) da Ficha de trabalho nº 2**

A Helena escolheu um intervalo válido que responde corretamente a esta alínea e justifica dizendo que, como na representação gráfica da função original verifica que esta é constante, então a função derivada tem de ser nula. Esta resolução mostra que os alunos que justificaram a sua resposta sabem identificar a nível gráfico que a derivada de uma reta constante é zero e que portanto a função derivada nesse intervalo tem de ser nula.

Na figura seguinte (Figura 34) apresento a resolução da Nicole que faz uma justificação distinta dos seus colegas.

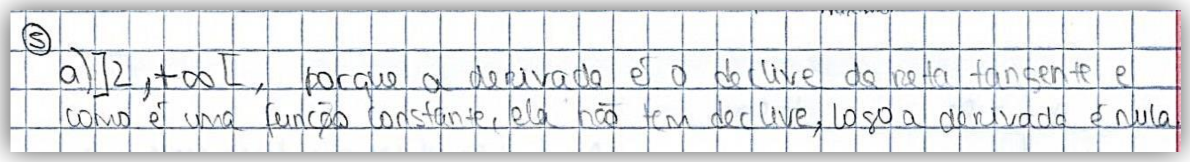



**Figura 34 - Resposta da Nicole à questão 5 – a) da Ficha de trabalho nº 2**

Na sua resposta, a Nicole recorre ao declive da reta tangente para justificar a escolha do intervalo onde a função derivada é nula. Esta justificação é muito interessante pois a aluna recorre a um argumento que talvez a maioria dos alunos já tenha esquecido. Esta justificação mostra que esta aluna compreendeu a relação que se estabelece entre a função original e a função derivada, nomeadamente o valor da derivada em cada ponto onde esta exista e o seu significado geométrico.

Relativamente aos alunos que responderam incorretamente posso dizer que o erro encontra-se no ponto de abcissa $2$, pois como se pode verificar pela resolução dos alunos Bruno e Sofia (Figura 35), estes incluem este valor, embora não exista derivada neste ponto.

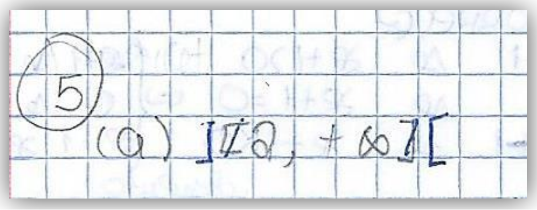


**Figura 35 - Resposta do Bruno e da Sofia à questão 5 – a) da Ficha de trabalho nº 2**

Considero que estes alunos na sua resolução[4] compreenderam que a função derivada é nula em parte deste intervalo, pois estes indicam claramente o intervalo onde a função original é constante. O facto de incluírem o ponto de abcissa 2 mostra que os alunos poderão ter dificuldades na identificação dos pontos onde não existe derivada, neste caso, na identificação dos pontos angulosos. A não identificação destes pontos poderá também revelar que os alunos não compreenderam verdadeiramente o conceito de função derivada e onde esta está ou não definida.

A Tabela 8 mostra ainda que três alunos não responderam à questão 5-a) e isso pode evidenciar, por um lado, que os alunos não tiveram tempo disponível de aula para realizar a questão 5 da ficha de trabalho ou, por outro, que sentiram dificuldades nesta questão. Estas dificuldades poderão estar relacionadas com o facto de a questão pedir informações sobre a função derivada a partir da função original e, até ao momento, na sua maioria as tarefas abordarem esta relação reciprocamente, ou seja, a partir da função derivada obter informação e propriedades sobre a função original. Ainda como possíveis dificuldades posso referir os alunos não conseguirem identificar, através da representação gráfica, que a derivada de uma reta constante é zero.

A questão 5-b) diz respeito, por um lado, à identificação de extremos de uma função e também relacioná-los com a existência ou não de derivada nesses pontos. Posso referir que nesta alínea existiram algumas dificuldades por parte dos alunos, nomeadamente na identificação dos extremos da função representada graficamente, aumentando também o número de alunos que não resolveu esta questão (ver Tabela 9).

[4] De notar que estes alunos fizeram a correção do que tinham feito diretamente no intervalo, colocando um traço por cima do que tinham escrito.

| **Resposta** | **N.º de Alunos $(n = 12)$** | **% de Alunos** |
|---|---|---|
| Identifica todos os extremos e verifica corretamente onde existe derivada | 0 | $0\%$ |
| Não identifica todos os extremos e verifica corretamente onde existe derivada | 7 | $58{,}3\%$ |
| Não responde | 5 | $41{,}7\%$ |

**Tabela 9 - Respostas dadas pelos alunos à questão 5-b) da Ficha de trabalho nº 2**

Como é possível verificar pela tabela anterior nenhum aluno conseguiu resolver corretamente esta questão. A maioria dos alunos apenas conseguiu identificar alguns dos extremos da função representada graficamente o que revela que estes demonstram algumas dificuldades no conceito de extremo de uma função. A figura seguinte (Figura 36) é a resolução da Nicole que tem a sua resposta quase totalmente correta.

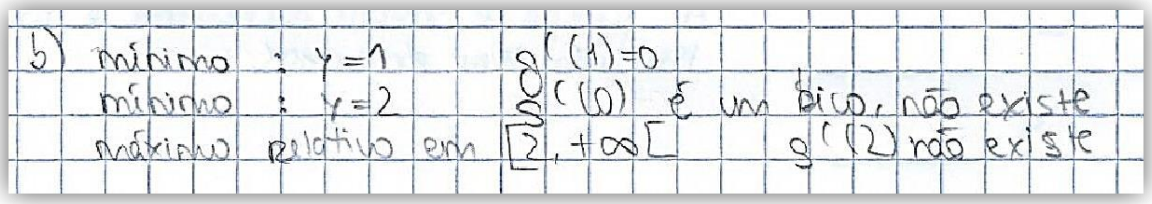
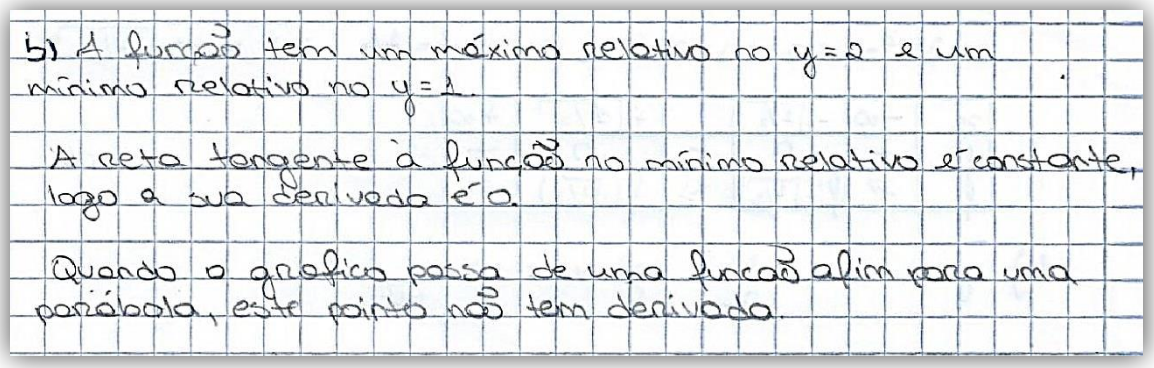

b) mínimo : $y=1$ $g'(1)=0$
mínimo : $y=2$ $g'(0)$ é um bico, não existe
máximo relativo em $[2,+\infty[$ $g'(2)$ não existe

**Figura 36 - Resposta da Nicole à questão 5-b) da Ficha de trabalho nº 2**

Esta aluna consegue identificar todos os extremos da função original, em particular quando a função é constante e portanto em todo esse intervalo tem máximos relativos, mas indica que para $y = 2$ a função tem um mínimo, o que não é verdade. Relativamente à existência ou não de derivada nos pontos indicados, a Nicole não demonstra dificuldades, indicando corretamente o valor da derivada, onde esta existe e justificando que não existe derivada para o ponto de abcissa $0$ por se tratar de um "bico". O facto de a Nicole utilizar esta expressão indica que, por um lado, não conhece a correta denominação para estes pontos, pontos angulosos, mas por outro consegue através da representação gráfica de uma função identificar esses mesmos pontos.

A figura seguinte (Figura 37) é um outro exemplo de resolução, feita pela aluna Margarida desta questão, onde não estão identificados todos os extremos da função.


b) A função tem um máximo relativo no $y=2$ e um mínimo relativo no $y=1$.

A reta tangente à função no mínimo relativo é constante, logo a sua derivada é 0.

Quando o gráfico passa de uma função afim para uma parábola, este ponto não tem derivada

**Figura 37 - Resposta da Margarida à questão 5-b) da Ficha de trabalho nº 2**

Esta aluna, tal como a maioria dos alunos que responderam a esta questão, não identificou o intervalo $[2, +\infty[$ como maximizantes da função. No que diz respeito à existência de derivada, a Margarida recorre à reta tangente ao gráfico da função para justificar que a derivada é zero no ponto de abcissa $1$. Isto revela que esta aluna compreendeu o significado geométrico de derivada num ponto e usa-o como argumento para a existência de derivada. Relativamente à justificação para a não existência de derivada no ponto de abcissa $0$, a aluna indica que a função "passa de uma função afim para uma parábola". Embora esta resposta não seja a mais clara, é possível perceber que a aluna compreende quando um ponto do gráfico de uma função é ponto anguloso e, portanto, a função não terá derivada nesse ponto.

O número de alunos que não respondeu a esta questão aumentou da alínea a) para esta alínea, por um lado, por não existir tempo de aula disponível para a resolver e, por outro, devido às dificuldades que os alunos sentiram, principalmente na identificação dos extremos. Durante o trabalho autónomo dos alunos, estes foram questionando-me sobre os extremos da função, mostrando dificuldades em compreender, por exemplo, que embora a função tivesse valor maiores que $2$, este valor era precisamente um máximo relativo da função.

A questão 5-c) pedia aos alunos que determinassem um quadro de sinais para função derivada, mais uma vez, a partir da representação gráfica da função original. A tabela seguinte (Tabela 10) mostra uma síntese do desempenho dos alunos nesta questão.

| **Resposta** | **N.º de Alunos ($n = 12$)** | **% de Alunos** |
|---|---|---|
| Responde corretamente | 5 | $41,7\%$ |
| Responde incorretamente | 1 | $8,3\%$ |
| Não respondeu | 6 | $50\%$ |

**Tabela 10 - Resposta dos alunos à questão 5-c) da Ficha de trabalho nº 2**

A tabela anterior em primeiro lugar revela que metade dos alunos não responderam a esta questão e o facto de alguns não terem tido tempo disponível de aula para o fazer, pode ser uma das razões. Além disso, os alunos podem ter tido dificuldades no que era pedido nesta alínea, pois nunca antes lhes tinha sido pedido um quadro de sinais da função derivada a partir da função original, em particular, estando a última representada graficamente.

Uma aluna, a Sofia, respondeu a esta questão, mas a sua resposta não está correta, como se pode verificar na figura seguinte (Figura 38).

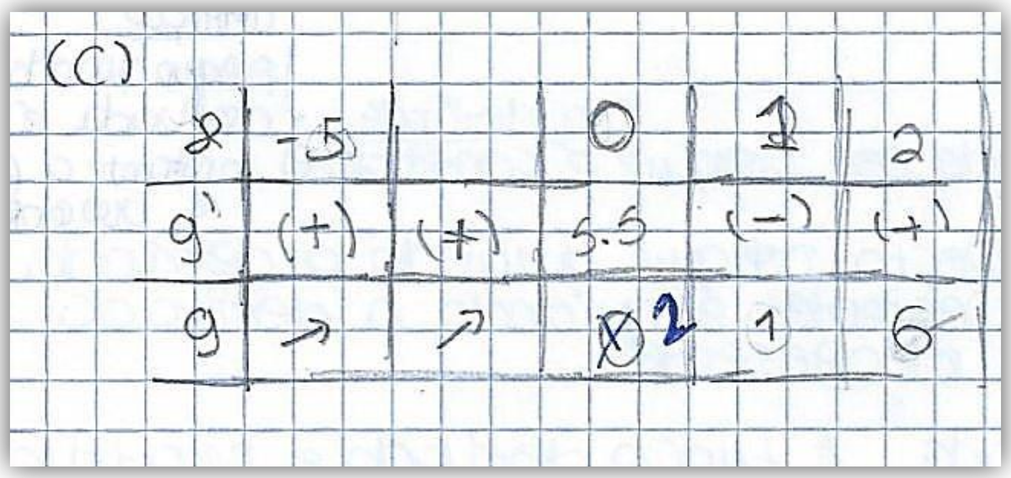



**Figura 38 - Resposta da Sofia à questão 5-c) da Ficha de trabalho nº 2**

Na sua resposta, a Sofia esquece-se de estudar a função derivada entre os pontos de abcissa $0$ e $1$ e entre $1$ e $2$, acabando por escrever que a derivada nestes pontos é negativa e positiva, respetivamente, o que não está correto, pois no primeiro a derivada é zero e no segundo não existe derivada. De referir que, embora a questão só pedisse um quadro de sinais da função derivada, a Sofia e outros alunos escreveram também a variação de monotonia da função original. Possivelmente, estes alunos fizeram-no, pois quando desenham o quadro de sinais da função derivada este está habitualmente acompanhado pela monotonia da função original.

Relativamente a esta questão, apresento ainda uma resolução correta (Figura 39), neste caso do aluno Henrique.

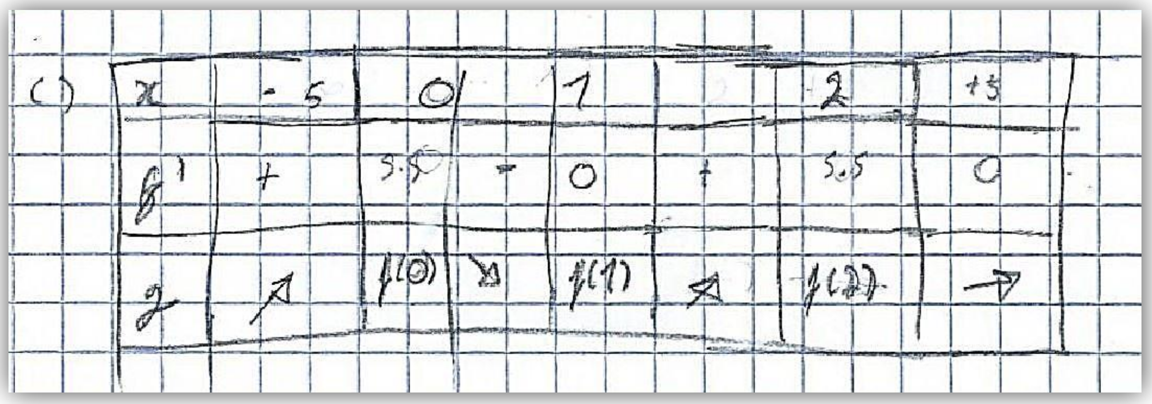


**Figura 39 - Resposta do Henrique à questão 5-c) da Ficha de trabalho nº 2**

O Henrique, tal como a Sofia, sentiu necessidade de escrever também a variação de monotonia da função original, possivelmente pelas razões que já apresentei acima. Nesta resposta é possível perceber que o aluno consegue estudar o sinal da função derivada a partir da função original, tendo em atenção os pontos onde esta existe e onde é zero.

**Em síntese,** a análise das três alíneas desta questão está relacionada com a forma como os alunos utilizam os seus conhecimentos sobre a função original para estudar propriedades da função derivada. É importante perceber se os alunos conseguem analisar a função derivada a partir da função original, em particular estando a segunda representada graficamente.

De uma forma geral a maioria dos alunos conseguiu responder às questões colocadas, mas surgiram dificuldades em aspetos importantes para o estudo de uma função, principalmente a função derivada. No que diz respeito à identificação da derivada em intervalos em que a função original é constante, os alunos não mostraram grandes dificuldades. Quando a função original muda de ramo, a identificação dos pontos de “mudança”, pontos angulosos, os alunos revelaram mais dificuldades, o que evidencia também que podem não ter compreendido totalmente o conceito de função derivada e onde esta está definida. Mais uma vez, esta dificuldade em identificar os pontos onde não existe derivada pode estar relacionada com o facto de uma representação gráfica ter uma grande concentração e complexidade de informação, tornando-se num obstáculo ao nível cognitivo, os alunos conseguirem resolver este tipo de questões (Eisenberg & Dreyfus 1991, citados em Almeida & Viseu, 2002).

Relativamente ao estudo do sinal da função derivada a partir da representação gráfica da função original foi interessante perceber que quase a totalidade dos alunos que resolveu a terceira alínea da questão 5 não teve grandes dificuldades, mostrando que consegue estabelecer esta relação no sentido inverso ao que estão acostumados. Mais uma vez, as maiores dificuldades dos alunos dizem respeito aos pontos de mudança de sinal ou referindo a função original, aos de mudança de monotonia. Devido às dificuldades sentidas na segunda alínea desta questão, os alunos cometeram mais erros na terceira, não respondendo corretamente às imagens desses pontos ou à não existência de derivada.

Fazendo uma síntese da análise desta questão, considero que os alunos, na sua maioria, conseguem estudar a função derivada a partir da função original, tirando conclusões válidas sobre a primeira, mas sentem dificuldades no que diz respeito à existência de extremos da função original e como estes se relacionam com a função derivada.

# Capítulo 6

# Conclusão

Neste capítulo, tendo em conta a análise de dados efetuada no capítulo anterior, apresento as principais conclusões obtidas que procuram dar resposta às questões de investigação. Estas questões foram formuladas para me orientar neste estudo que tem como objetivo analisar a compreensão que os alunos do 11.º ano revelam da noção de função derivada e a sua relação com a função original, em diferentes representações. Desta forma, as conclusões estão organizadas por questão de investigação.

Posteriormente, faço uma reflexão pessoal e final sobre esta experiência, nomeadamente as aprendizagens realizadas com este estudo e de que forma estas contribuíram para o meu desempenho futuro como profissional.

## 6.1. Principais conclusões do estudo

Este estudo teve como ponto de partida a formulação de três questões de investigação, tendo sido construído e pensado sempre com essas questões bem presentes. Desta forma, neste subcapítulo apresento as principais conclusões deste estudo, articulando com o enquadramento teórico, procurando dar resposta e refletir sobre elas.

**Como os alunos interpretam a noção de função derivada em diferentes representações?**

No que diz respeito a tarefas que envolvam um contexto geométrico como a determinação do declive de uma reta tangente a um gráfico de uma função, a utilidade da expressão algébrica da função derivada não pareceu clara para todos os alunos. Embora seja evidente que todos os alunos reconheçam a derivada num ponto como o declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto, não foi trivial para estes alcançarem uma visão do conceito de derivada num intervalo e das suas propriedades nesse intervalo (Park, 2015), ou seja, a derivada como uma função. Desta forma, posso dizer que o conceito de derivada num ponto é “encarado segundo várias representações, podendo considerar-se que o mesmo se encontra reificado” (Domingos, 2003, p. 335), enquanto o conceito de função derivada é visto como uma função real de variável real (Orhun, 2012) não sendo clara para todos os alunos como esta está definida e o que representa em cada ponto do seu domínio.

No que diz respeito aos problemas de otimização, os alunos mais uma vez relevaram que não atribuem utilidade à noção de função derivada. Mais precisamente, a maioria dos alunos recorreu às capacidades gráficas da calculadora para resolver este tipo de situação. Considero que o uso deste recurso está relacionado com o que defende Consciência (2013), já que os alunos, por vezes, usam a calculadora gráfica para representarem graficamente a função envolvida e analisar as suas características e também para explorar determinadas situações problemáticas. Ainda relativamente ao uso da calculadora gráfica devo referir que esta turma, no ano anterior, ou seja, no 10.º ano já tinha feito parte de um estudo intitulado “O uso da calculadora gráfica, por alunos do 10.º ano, nas conexões entre representações de funções polinomiais em contexto de resolução de problemas” (Termentina, 2014). A autora deste estudo concluiu que, no que diz respeito à determinação de extremos de uma função os alunos perceberam, “de forma quase intuitiva, onde têm de recorrer para obter as coordenadas dos pontos solicitados, consoante pretendam um máximo ou mínimo” (p. 81). Desta forma, posso concluir que neste tipo de problemas, como apela precisamente à determinação de extremos de uma função, os alunos não reconhecem a função derivada como a escolha mais natural.

Relativamente às regras de derivação foi evidente, através da análise de dados que os alunos conseguem determinar a expressão algébrica da função derivada através destas, embora evidenciem dificuldades na determinação da expressão algébrica da função módulo. Assim, o conceito imagem (Tall & Vinner, 1981) dos alunos relativamente ao conceito de função derivada é caracterizado por “procedimentos e processos elementares” (Domingos, 2003, p. 339), reconhecendo-a como uma nova função, embora em determinados contextos não a relacionando com a função original. No que concerne ao conceito definição (Tall & Vinner, 1981) de função derivada, desenvolvido pelos alunos, na maior parte dos casos manifesta-se por definições que os próprios alunos têm de função real de variável real (Orhun, 2012). Para estes, a função derivada é definida por uma expressão algébrica, que estes sabem determinar, tem uma representação gráfica associada a essa expressão, mas só posteriormente conseguiram adquirir espirito crítico para definir o seu domínio e reconhecer que este depende de uma outra função e dos pontos onde esta possa ter derivada.

**Como os alunos usam o seu conhecimento sobre a função derivada para analisar as propriedades da função original e reciprocamente?**

Para responder a esta questão de investigação, em primeiro lugar vou referir-me à forma como os alunos usam o seu conhecimento sobre a função derivada para analisar as propriedades da função original, quando a última está representada algebricamente. Relativamente a funções polinomiais os alunos conseguem determinar a expressão algébrica da função derivada, conseguem facilmente estudar o seu sinal e tirar conclusões sobre a monotonia da função original (Orton, 1980, citado em Artigue, 1991). Devo referir que, no decorrer das aulas e pelas observações que fui fazendo verifiquei que os alunos faziam este estudo como uma “receita”, seguindo a forma como o primeiro exemplo tinha sido explorado na aula.

Quando a função a estudar não era polinomial, os alunos também realizavam o mesmo processo, mas como, por vezes, encontravam dificuldades ao estudar as funções derivadas encontradas, o que tornava um obstáculo para a resolução deste tipo de questões. Desta forma, os alunos conhecem o procedimento relacionado com o estudo do sinal da função derivada para fazer o estudo da variação da função original, mas a sua utilização está centrada em regras e procedimentos (Orton, 1980, citado em Artigue, 1991; Gil, 2014).

No que diz respeito à forma como os alunos usam o seu conhecimento sobre a função derivada para a analisar as propriedades da função original, quando estas estão representadas graficamente foi para mim algo surpreendente, pois segundo a teoria os alunos revelam dificuldades em estabelecer conexões entre o gráfico da função derivada com o da função original (Orhun, 2012). A maioria dos alunos da turma conseguiu estabelecer estas conexões através da relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação da função original, embora alguns alunos recorressem aos seus conhecimentos sobre funções adquiridos anteriormente. Estes alunos, que mostraram facilidade no reconhecimento e identificação de funções e suas respetivas representações gráficas conseguiram, de um modo geral resolver tarefas deste tipo com sucesso (Consciência, 2013). É importante referir que este reconhecimento, por exemplo da representação gráfica de funções polinomiais, esteve sempre combinado com as regras de derivação, pelo que mostra que não só os alunos as compreenderam pela sua definição com expressões algébricas, mas o que isso implica ao nível gráfico com as funções em causa. Assim, posso concluir tal como defendem Aspinwall, Shaw e Presmeg (1997) que o recurso a várias representações foi determinante para a compreensão destes conceitos.

Devo referir ainda que no que diz respeito ao estudo da função derivada a partir da função original, os alunos conseguem estabelecer a relação entre a variação de monotonia da última com a mudança de sinal da primeira, evidenciando a capacidade de fazer o raciocínio inverso ao que estão habituados. Ao longo das aulas e tendo em conta as observações feitas e a análise de dados, por vezes, os alunos não completam o estudo da função original a partir da sua função derivada, pois não determinam os extremos da primeira. Isto foi algo que aconteceu ao longo das tarefas onde as funções estavam representadas algebricamente, enquanto na maioria das tarefas em que o estudo teria de ser feito a partir das representações gráficas conseguiam completar o estudo da função original, mesmo que não fosse exigido. Desta forma, o conceito imagem (Tall & Vinner, 1981) formado pelos alunos relativamente ao conceito de função caracteriza-se por uma abordagem baseada em representações gráficas (Domingos, 2003) contribuindo para que tenham mais espontaneidade em resolver este tipo de tarefas quando as funções estão representadas graficamente. Os alunos além de estudarem, mais facilmente, as propriedades das funções, como o seu sinal e a monotonia através das representações gráficas, também revelaram uma maior compreensão das regras de derivação, pois associaram-nas aos seus conhecimentos sobre as representações gráficas de funções já conhecidas.

Em síntese, os alunos utilizam o seu conhecimento sobre função derivada para analisar as propriedades da função original e reciprocamente, usando as condições que conhecem para obterem conclusões válidas. Por vezes, os alunos não fazem um estudo completo das propriedades das funções, quando estas estão representadas algebricamente, conseguindo bons resultados quando estas estão representadas graficamente.

**Que dificuldades persistem no final da unidade didática quanto à noção de função derivada e da relação entre esta e a função original e reciprocamente?**

No final da unidade didática, as dificuldades manifestadas pelos alunos quanto à função derivada dizem respeito ao reconhecimento da utilidade que o estudo desta função possa ter em determinadas situações, com contextos diversos. Foi evidente a clara preferência dos alunos pela calculadora gráfica na resolução de problemas de otimização, o que pode evidenciar uma dificuldade na compreensão do conceito de função derivada e na relação que esta estabelece com a função original, quando a última tem um contexto real envolvido.

Além dos problemas de otimização, nem todos os alunos compreenderam o significado dos valores que a função derivada devolve em cada ponto do seu domínio, mostrando ainda dificuldades em reconhecer a função derivada como um objeto matemático útil para determinar o declive da reta tangente ao gráfico de uma função, num determinado ponto, embora reconheçam que esse mesmo declive é a derivada nesse ponto. Ainda relativamente à interpretação geométrica de derivada devo referir que os alunos, no caso da função módulo têm dificuldades em reconhecer que a reta tangente ao gráfico coincide com o próprio gráfico. Esta dificuldade pode estar relacionada com o conceito imagem (Tall & Vinner, 1981) dos alunos relativamente à noção de tangência a uma curva, onde a reta tangente apenas encontra a curva num único ponto (Domingos, 2003), criando um obstáculo à determinação das retas tangentes ao gráfico de uma função cujo gráfico seja uma reta.

As dificuldades que ainda persistem nos alunos em relacionar a função derivada e a função original dizem respeito ao estudo completo da primeira, nomeadamente nas condições necessárias para que haja extremos na segunda. Mesmo quando alguns alunos recorriam ao estudo da função derivada não revelaram dificuldades em determinar a expressão algébrica da função derivada da maioria das funções, a partir das regras de derivação à exceção da função módulo, onde os processos de cálculo envolvidos são de difícil realização, causando mesmo entraves à resolução das tarefas (Domingos, 2003). Quando o estudo da função derivada teve de ser feito através da sua expressão algébrica, os alunos revelaram mais dificuldades, como por exemplo na determinação dos zeros de uma função racional do 1º grau, muitas vezes não conseguindo concluir a tarefa.

Além destes obstáculos, os alunos muitas vezes não determinaram os extremos da função original, o que pode evidenciar que tiveram dificuldades na compreensão das condições necessárias na função derivada para que seja possível tirar conclusões para a existência de extremos da função original. Mesmo quando determinam os extremos da função original, foi evidente que os alunos, no final da unidade didática associam-nos aos zeros da função derivada, não verificando outra condição para justificar que esses valores correspondem aos extremos da função original. Mais uma vez, esta associação entre os zeros da função derivada e os extremos da função original está relacionada com os procedimentos (Orton, 1980, citado em Artigue, 1991) que aprenderam deste o primeiro exemplo deste tipo de tarefas.

Tenho ainda de referir uma dificuldade que persistiu nos alunos, que ficou evidente numa tarefa relacionada com a determinação da expressão algébrica da função original, através da expressão algébrica da sua função derivada. Esta dificuldade diz respeito aos alunos não identificarem que uma mesma expressão de uma função derivada pode ser obtida a partir de uma infinidade de funções originais. Considero que este aspeto poderia ter sido mais trabalhado com os alunos, para que estes compreendessem que é necessária informação adicional sobre a função que deu origem à função derivada, para que possamos saber qual a expressão algébrica da primeira.

Desta forma, posso dizer que as dificuldades dos alunos que persistem dizem respeito ao estudo de funções de determinadas famílias, melhorando ao longo da unidade didática a sua compreensão sobre a relação entre a função derivada e a função original. Devido aos obstáculos que muitas vezes o estudo dessas funções causavam aos alunos, estes não concluíam o seu estudo, mostrando ainda que nalgumas tarefas não conseguem estudar os extremos da função original.

## 6.2. Reflexão final

Ao terminar este trabalho, considero importante fazer uma reflexão sobre as aprendizagens realizadas através deste estudo para a minha futura carreira profissional. Ao longo destes dois anos, em particular neste último ano a aprendizagem e os conhecimentos que fui adquirindo revelaram-se muito importantes para desempenhar futuramente o meu papel como professora, numa sala de aula, perante uma turma.

Quando iniciei este mestrado foi com o desejo de me tornar professora de Matemática, para que pudesse ensinar aos meus alunos os conceitos matemáticos que são tão importantes, tanto para as suas vidas como para o desenvolvimento do seu raciocínio, mas também para que pudesse transmitir algum gosto por esta ciência, tal como me transmitiram um dia. No segundo ano, quando pela primeira vez entrei numa sala de aula, com uma turma que sabia que iria acompanhar durante todo o ano letivo foi um momento muito importante para mim e que me marcou, pois percebi que de facto era esta a profissão que gostaria de ter. Devo dizer que estava um pouco nervosa porque tinha algum receio da reação da turma perante a minha presença, mas os alunos receberam-me muito bem e mais importante ainda consideravam-me como uma professora de Matemática. Sempre se mostraram disponíveis e com vontade de aprender e nunca recearam colocar questões ou expor as suas dúvidas, o que me deu mais confiança em sala de aula. Além de me dar mais confiança, foram essas intervenções dos alunos, que não se podem prever, que contribuíram também para o meu crescimento enquanto professora.

Relativamente à unidade didática que serviu de base para este estudo devo dizer que me deu muita satisfação lecioná-la, pois desde que fui aluna o cálculo diferencial sempre foi um tema me despertou interesse, nomeadamente as derivadas e a relação que se estabelece com a função original. Quando decidi o que pretendia estudar neste tema e qual seria o objetivo para este trabalho foi-me dada a oportunidade de lecionar não apenas uma subunidade onde o objetivo do estudo se enquadrava, mas sim toda a unidade didática “Taxa de Variação e Derivada”. Desta forma, o número de aulas que lecionei contabilizou doze blocos de 90 minutos. Embora seja um número elevado de aulas neste tipo de estudo de cariz investigativo permitiu-me um trabalho mais completo na lecionação destas aulas. Além de me proporcionar uma maior experiência e confiança na condução das aulas e na resposta às intervenções inesperadas, dúvidas e dificuldades dos alunos, permitiu-me uma visão mais global dos conceitos que iriam ser abordados ao longo da unidade didática.

Devo referir que a planificação de todas as aulas, a elaboração e seleção de tarefas foi algo também que me deu muita satisfação, pois estas foram sempre pensadas tendo em conta os objetivos que pretendia para cada aula e para este estudo, bem como as características da turma. Até entrar neste mestrado, nunca antes tinha pensado em aulas com tarefas de exploração e foi com agrado que consegui passar da teoria à prática. As unidades curriculares que me deram a conhecer este tipo de tarefas foram determinantes para que nas minhas aulas existisse espaço para estas tarefas. Assim, devo dizer que foi desafiante para mim, com o trabalho conjunto da minha colega de estágio, não só elaborar estas tarefas como também planear estas aulas, nomeadamente nos vários momentos que são tão importantes para o sucesso deste tipo de aulas, bem como no meu papel como professora na sala de aula. Consegui perceber que existem formas muito interessantes e eficazes de os alunos compreenderem os conceitos, sem que o professor tenha o papel central em sala de aula, deixando-o para os alunos.

Com a minha intervenção letiva tive também oportunidade de perceber a importância das tecnologias para uma melhor compreensão dos conceitos por parte dos alunos. Nas aulas onde a tecnologia esteve presente senti uma maior motivação por parte da turma, embora considere que necessito de melhorar a minha ação nestas aulas, pois as situações que surgem são de várias naturezas, havendo, por vezes, da minha parte algum “improviso”. Desde dificuldades dos alunos com a utilização dos recursos, até alguns problemas dos próprios recursos da escola foram obstáculos que foi aprendendo a ultrapassar, pois sempre acreditei no sucesso destas aulas com recurso a tecnologia.

No que diz respeito à realização deste trabalho de cariz investigativo, este exigiu-me sempre um questionamento e uma reflexão sobre as diversas escolhas que tive de fazer ao longo da unidade didática. A análise de dados foi uma das partes mais difíceis de realizar, nomeadamente pela dificuldade em selecionar os dados mais relevantes perante a quantidade de dados recolhidos. Após esta seleção, a análise de dados tornou-se uma fase fundamental deste trabalho, levando-me a descobrir como os alunos de facto aprenderam os conceitos e os utilizam para resolver as tarefas. Também ao analisar as resoluções dos alunos fui-me apercebendo das suas dificuldades e isso levou-me a refletir sobre a possibilidade de melhorar a minha prática profissional de forma a melhorar a aprendizagem de futuros alunos.

De uma forma global, acredito que toda esta experiência foi bastante enriquecedora para mim, enquanto futura professora. Acima de tudo, o contacto com os alunos ensinou-me a ser mais confiante e segura, tornando-me numa pessoa melhor. Acredito que nunca esquecerei esta experiência e irei com certeza relembrá-la de forma a melhorar alguns aspetos como professora, para que os alunos tenham também aprendizagens mais significativas.

# Referências


Agrupamento de Escolas de Caneças (2009). *Projeto Educativo 2009/2013*. (documento não publicado).

Almeida, C., & Viseu, F. (2002). Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação, 15(1)*, 193-219.

Artigue, M. (1991). Analysis. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrecht: Kluwer.

Aspinwall, L., Shaw, K., & Presmeg, N. (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 301-317.

Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics, 68*, 19-35.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Carvalho, L. I., Ferreira, R., & Ponte, J. P. (2011). Representações no estudo das funções racionais. In *Actas do XXII SIEM*. Lisboa: APM.

Colaço, S., Branco, N., Brito, M. G. & Rebelo, M. C. (2009). A utilização do GeoGebra em contexto de sala de aula. In *Actas do ProfMat2009*. Viana do Castelo: APM. (Digital)

Consciência, M. (2013). *A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário* (Tese de Doutoramento). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Consciência, M., & Oliveira, H. (2011). Conexões entre representações, em funções não familiares, mediadas pela calculadora gráfica: o caso do Diogo. *In Actas do XXII SIEM*. Lisboa: APM.

Coutinho, C. (2013). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: Teoria e prática*. Coimbra: Edições Almedina.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no início do superior* (Tese de Doutoramento). Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119 – 161). New York, NY: Macmillan.

Fernandes, D. (2013). Avaliação em educação: Uma discussão de algumas questões críticas e desafios a enfrentar nos próximos anos. *Revista Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação, 21*(78), 11-34.

Fernandes, D. (2011). Articulação da aprendizagem, da avaliação e do ensino: Questões teóricas, práticas e metodológicas. In M.P. Alves & J. M. De Ketele (Orgs.), *Do currículo à avaliação, da avaliação ao currículo* (pp. 131-142). Porto: Porto Editora.

Figueira, M. S. R. (2002). *Fundamentos de Análise Infinitesimal*. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Gil, R. (2014). *A aprendizagem da noção de derivada no 11.º ano* (Relatório da Prática de ensino supervisionada). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problema solving. In L. D. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (Second ed., pp. 176-201). New York na London: Routledge.

Habre, S. & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in na experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior, 25*, 57-72.

Haciomeroglu, E., Aspinwall, L., & Presmeg, N. (2010). Contrasting Cases of Calculus Student's Understanding of Derivative Graphs. *Mathematical Thinking and Learning, 12*, 152-176.

Kendal, M., & Stacey, K. (2003). Tracing Learning of Three Representations with the Differentiation Competency Framework. *Mathematics Education Research Journal, 15*(1), 22-41.

Loureiro, V. (2012). *Função Derivada: uma abordagem didática no Ensino Secundário* (Dissertação de Mestrado). Universidade de Aveiro, Aveiro.

Mata-Pereira, J. (2012). *O raciocínio matemático em alunos do 9.ºano no estudo dos números reais e inequações* (Dissertação de Mestrado). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: DGIDC.

ME (2002). *Programa de Matemática A do Ensino Secundário*. Lisboa: DES.

ME (2001). *Programa de Matemática A do Ensino Secundário*. Lisboa: DES.

NCTM (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: APM (obra original em inglês, publicada em 2000).

Nunes, F. (1996). Será de ir em grupos na aprendizagem da Matemática? In *Actas do Profmat 96*. Almada: APM.

Oliveira, H. & Domingos, A. (2008). Software no ensino e aprendizagem da matemática: algumas ideias para discussão. In A. P. Canavarro, D. Moreira, & M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 279-285). Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da matemática: contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a construção de um quadro de referência. *Quadrante, 22*(2), 29-53.

Orhun, N. (2012). Graphical understanding in mathematics education: derivate functions and students' difficulties. *Procedia – Social and Behavioral Sciences, 55*, 679-684.

Park, J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it? *Educational Studies in Mathematics, 89*, 233-250.

Pinto, J., & Santos, L. (2006). É mesmo possível uma regulação no quotidiano do trabalho do professor e do aluno? *ProfMat2006 [CD].* Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ramos, C., & Raposo, L. (2008). A calculadora gráfica e as representações matemáticas: uma experiência. In A. P. Canavarro, D. Moreira, & M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 196-209). Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Saraiva, M., Teixeira, A., & Andrade, J. (2010). Estudo das funções no Programa de Matemática A com problemas e tarefas de exploração. (http://www.apm.pt/files/178672_Segment_001_4d3de4ed6e285.pdf)

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projeto MPT.

Semião, M., & Canavarro, A. P. (2008). A utilização da calculadora gráfica na aula de matemática: um estudo com alunos do 12º ano no âmbito das funções. In A. P. Canavarro, D. Moreira, & M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 183-195). Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Silva, J. S., & Paulo, J. D. S. (1968). *Compêndio de Álgebra – 1º tomo 6.º ano.* Braga: Livraria Cruz.

Silva, F. (2012). *Pensamento algébrico: O sentido de símbolo e de variável em alunos do 8.ºano de escolaridade* (Relatório da Prática de ensino supervisionada). Instituto da Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Stein, M. & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. *Educação e Matemática*, 105, 22-28.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. Retirado de: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001p-esm-infinity.pdf

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and comncept definition in mathematics with particular reference to lomits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1998). *Funções – 11.º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério de Educação.

Termentina, M. (2014). *O uso da calculadora gráfica, por alunos do 10.º ano, nas conexões entre representações de funções polinomiais em contexto de resolução de problemas* (Relatório da Prática de ensino supervisionada). Instituto da Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Zimmermann, W. (1991). Visual thinking in calculus. In W. Zimmermann, & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 127-137). Washington DC: Mathematical Association of America.

**Legislação Consultada:**

Decreto-lei 240/2001 de 30 de agosto de 2001. *Diário da República – I Série A*. Ministério da Educação. Lisboa.

# Anexos

# Anexo 1

# Planificações das Aulas

## 1.1. Planificação da 1ª Aula e Guião para GeoGebra

Aula de 24 de fevereiro de 2015 – Plano de Aula

| | | |
|---|---|---|
| Matemática | Introdução ao Cálculo Diferencial I | Ano: 11º |

| **Sumário** |
|---|
| Noção de Taxa Média de Variação e interpretação geométrica: tarefa de exploração. |

| **Objetivos** |
|---|
| Compreender a noção de Taxa Média de Variação num intervalo, a sua relação com a monotonia da respetiva função no intervalo e a sua interpretação geométrica. |

| **Recursos** | | | |
|---|---|---|---|
| **Professor** | Manual escolar<br>Tarefa "Estância de Ski" (Anexo 2.1)<br>Projetor<br>Computador Portátil | **Aluno** | Computador portátil<br>Tarefa "Estância de Ski" (Anexo 2.1)<br>Guião GeoGebra<br>Manual escolar |

| **Principais Tópicos e conceitos envolvidos** | **Capacidades Transversais** |
|---|---|
| Noção de taxa média de variação; cálculo de taxa média de variação. | Comunicação Matemática<br>Raciocínio Matemático |

| **Metodologia de trabalho** |
|---|
| Introdução aos conceitos de variação e taxa média de variação (e respetiva interpretação geométrica) através da resolução da tarefa de exploração "Estância de Ski", em pares ou grupos de 3 elementos, recorrendo ao *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Discussão dos resultados em grande grupo e sistematização dos conceitos envolvidos. |

| Momentos da aula | Tempo Previsto – Aula 90 minutos |
|---|---|
| (1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas. | 5min |
| (2) Apresentação da Tarefa “Estância de Ski” | 8min |
| (3) Resolução da Parte I da Tarefa “Estância de Ski” | 25min |
| (4) Apresentação e discussão dos resultados da Parte I | 15min |
| (5) Sistematização das Aprendizagens | 5min |
| (6) Resolução da Parte II da Tarefa “Estância de Ski” | 10min |
| (7) Apresentação e discussão dos resultados da Parte II | 10min |
| (8) Sistematização das Aprendizagens | 10min |
| (9) Encerramento da aula | 2min |

| Desenvolvimento da Aula |
|---|
| (1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos. |
| (2) Apresentação da Tarefa “Estância de Ski”<br>Os alunos serão informados sobre a organização da aula, nomeadamente no que se refere à metodologia de trabalho. A professora indicará a forma como os alunos devem utilizar o *software* de geometria dinâmica GeoGebra e alertará para o facto de, juntamente com a Tarefa “Estância de Ski”, ser entregue um guião para facilitar o trabalho com o *software*. Além da entrega do guião a professora projetará um ficheiro de GeoGebra de modo a indicar aos alunos alguns comandos básicos deste *software*.<br>Neste momento de apresentação a professora informará também que a tarefa está dividida em duas partes e que só após a resolução e discussão da primeira parte será entregue a segunda.<br>Apesar de a tarefa ser realizada em pares (ou grupos de 3 elementos), cada aluno receberá uma tarefa e um guião. Cada aluno deverá responder às questões na tarefa que será recolhida no final da aula.<br>Os alunos terão um breve momento para observar o guião e a Parte I da tarefa e caso existam dúvidas generalizadas a professora deverá intervir de modo a que todos os alunos iniciem a tarefa nas mesmas condições. |
| (3) Resolução da Parte I da Tarefa “Estância de Ski”<br>Os alunos resolverão autonomamente a Parte I da Tarefa “Estância de Ski”.<br>Entre as questões 2.(a) e 2.(b) será introduzida a definição de variação de uma função. Esta definição será projetada no quadro para que os alunos a escrevam no seu caderno diário após resolverem a questão 2.(a).<br>Analogamente entre as questões 2.(c) e 2.(d) os alunos irão contactar com a definição de taxa média de variação que deverão escrever no caderno diário.<br><br>Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.<br>Além das dúvidas que os alunos poderão revelar na resolução das questões, estes poderão mostrar algumas dificuldades no trabalho com o *software*. Neste caso a professora deverá encaminhá-los mais uma vez para o guião fornecido no início da aula e, caso persistam as dificuldades, auxiliar os alunos no manuseamento do recurso. |

| | |
|---|---|
| | Relativamente às questões, de uma forma geral esta parte da tarefa não deverá implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que estas são, na sua maioria, bastante diretas.<br>No entanto, algumas questões requerem especial cuidado, nomeadamente 1.(a), 2.(b), 2.(c) e 3.(c). Na primeira questão, onde os alunos terão de esboçar o gráfico da função, estes poderão ter algumas dificuldades relativamente ao domínio da função, pelo que a professora deverá questioná-los sobre o contexto do problema de modo a encaminhá-los para o domínio correto. Nas questões que introduzem a taxa média de variação (2.(b) e 2.(c)) os alunos poderão evidenciar algumas dificuldades uma vez que nunca contactaram com este conceito. Caso estas dificuldades surjam, a professora deverá encaminhar os alunos para a nota da questão 2.(b), de modo a que estes compreendam intuitivamente a noção de variação média. Se mesmo assim os alunos continuarem com dificuldades a professora deverá recorrer a um exemplo, nomeadamente sobre velocidade média. Sendo uma dúvida geral, a professora interromperá o trabalho dos grupos e dará aos alunos o exemplo de um automobilista que percorre 150 quilómetros entre as 16h00 e as 19h00 e questioná-los-á acerca da velocidade média a que o automobilista efetuou a viagem neste intervalo de tempo. Tendo em conta a proximidade deste exemplo com o quotidiano social, os alunos deverão com facilidade concluir que o automobilista circulou em média a 50 quilómetros por hora. A professora enfatizará a relação entre este exemplo e o cálculo da taxa média de variação, de modo a facilitar a compreensão do conceito por parte dos alunos.<br>A última questão, 3.(c) poderá levantar algumas dúvidas uma vez que é uma questão mais aberta a que os alunos não estão tão acostumados. Deste modo, caso surjam dúvidas nesta alínea a professora deverá questionar os alunos acerca do comportamento da função num determinado intervalo e da relação que podem estabelecer entre esta e a taxa média de variação no mesmo intervalo. Caso os alunos tenham dificuldades em perceber que se a função é estritamente crescente num determinado intervalo (respetivamente estritamente decrescente) então a taxa média de variação é positiva (respetivamente negativa) no mesmo intervalo, então a professora deverá recorrer a alguns exemplos extra de modo a encaminhar os alunos para a relação pretendida. A professora questionará os alunos sobre a implicação contrária.<br>Além de apoiar os alunos em eventuais dúvidas, a professora deverá tomar conhecimento das resoluções dos vários grupos para que, na fase de apresentação e discussão, caso exista alguma resolução particularmente interessante ou diferente das restantes, indique a esse(s) grupo(s) para ir ao quadro. |
| (4) | Apresentação e discussão dos resultados da Parte I<br>Os alunos apresentarão no quadro as suas resoluções, que serão discutidas com a turma caso existam dúvidas ou resoluções diferentes.<br>Com exceção da questão 3.(c), um grupo (representado por um aluno) irá ao quadro expor a sua resolução. Neste momento os colegas terão oportunidade de interagir colocando dúvidas, caso existam, e o aluno em questão deverá explicar à turma o seu raciocínio. No caso da questão 3.(c), se existirem diferentes conjeturas que a professora considere que devem ser discutidas com toda a turma, os grupos em questão apresentarão as suas conjeturas, justificando-as perante os colegas que poderão colocar questões se sentirem essa necessidade. Espera-se que alguns alunos consigam usar contraexemplos para evidenciar que a implicação contrária nem sempre se verifica.<br><br>O papel da professora será o de mediadora de aprendizagens e gestora das interações, proporcionando um papel central aos alunos. No entanto caso existam dúvidas generalizadas deverá intervir cuidando que toda a turma realize aprendizagens significativas. Além disso, no final da apresentação de cada questão deverá questionar a turma sobre eventuais dúvidas e particularmente na última questão deverá assegurar-se que todos os alunos compreenderam a relação entre a monotonia da função e a taxa média de variação em determinado intervalo. |

(5) Sistematização das aprendizagens

Serão projetadas as definições de variação e de taxa média de variação (que os alunos já deverão ter escrito no caderno diário). A professora enfatizará a importância da noção de taxa média de variação e caso ainda existam dúvidas sobre os conceitos serão esclarecidos neste momento. Posteriormente será projetado um quadro referente à relação entre a monotonia de uma função e a taxa média de variação em determinado intervalo, que os alunos deverão registar. Mais uma vez, caso os alunos ainda tenham dúvidas neste momento a professora fará uma explicação para a turma.

(6) Resolução da Parte II da Tarefa "Estância de Ski"

Os alunos resolverão autonomamente a Parte II da Tarefa "Estância de Ski".

Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.

De uma forma geral, tal como a anterior, esta parte da tarefa não deverá implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que a maioria dos conceitos são bastante percetíveis e diretos. No entanto os alunos poderão mostrar algumas dificuldades no trabalho com o *software*, nomeadamente na representação das retas na questão 1.(b). Neste caso a professora deverá encaminhá-los mais uma vez para o guião fornecido no início da aula e caso persistam as dificuldades auxiliar os alunos no manuseamento do recurso. Os alunos poderão também mostrar dificuldades no preenchimento da tabela, no que se refere ao reconhecimento do declive. Neste caso a professora deverá questionar os alunos sobre a equação reduzida da reta $y = mx + b$ recordando-os do significado de $m$ e $b$.

Na última questão, caso os alunos mostrem dificuldades em conjeturar a relação entre a taxa média de variação de um intervalo $[a, b]$ e o declive da reta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, a professora deverá questioná-los sobre os valores registados nas tabelas anteriores e caso seja necessário fornecer mais exemplos.

Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.

Além de apoiar os alunos em eventuais dúvidas, a professora deverá tomar conhecimento das resoluções dos vários grupos para que, na fase de apresentação e discussão, caso exista alguma resolução particularmente interessante ou diferente das restantes, indique a esse(s) grupo(s) para ir ao quadro.

(7) Apresentação e discussão dos resultados da Parte II

Os alunos apresentarão as suas resoluções, que serão discutidas com a turma caso existam dúvidas ou resoluções diferentes.

Uma vez que as questões 1.(a) e 1.(b) dão particular ênfase à visualização através do *software*, a apresentação destas alíneas será feita projetando os ficheiros dos próprios alunos. De modo a facilitar a gestão de sala de aula, uma vez que os alunos têm de ligar os seus computadores ao projetor, o grupo que apresentar a resolução da 1.(a) apresentará também a 1.(b). Os colegas terão oportunidade de interagir colocando dúvidas, caso existam, e se tiveram representado pontos e/ou retas diferentes das que estão a ser apresentadas deverão dizê-lo e colocar as suas questões. No caso da questão 1.(c), se existirem diferentes conjeturas que a professora considere que devem ser discutidas com toda a turma, os grupos em questão apresentarão as suas conjeturas, justificando-as perante os colegas que poderão colocar questões.

O papel da professora será o de mediadora de aprendizagens e gestora das interações, proporcionando um papel central aos alunos. No entanto caso existam dúvidas generalizadas deverá intervir cuidando que toda a turma realize aprendizagens significativas. Além disso, no

| |
|---|
| final da apresentação de cada questão deverá questionar a turma sobre eventuais dúvidas e particularmente na última questão deverá assegurar-se que todos os alunos interiorizaram a interpretação geométrica da taxa média de variação da função num determinado intervalo. |
| (8) Sistematização das aprendizagens<br>Será projetado um quadro referente à interpretação geométrica da taxa média de variação de uma função num intervalo $[a, b]$ que os alunos deverão registar no seu caderno diário. A professora deverá enfatizar a importância da interpretação geométrica e o seu significado. Caso ainda existam dúvidas sobre alguns dos conceitos abordados, os alunos deverão colocá-las neste momento sendo que a professora fará uma explicação para a turma. |
| (9) Encerramento da aula<br>Os alunos serão informados do trabalho de casa. |

| **Comentário** |
|---|
| Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostos como extra:<br>- Proposta 1 da página 136<br>- Exercício 34 da página 60<br>- Exercício 38 da página 61<br>Caso os exercícios 34 e 38 não sejam realizados em aula, serão considerados trabalho de casa. |

**AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CANEÇAS**

**MATEMÁTICA A**

11.º ano

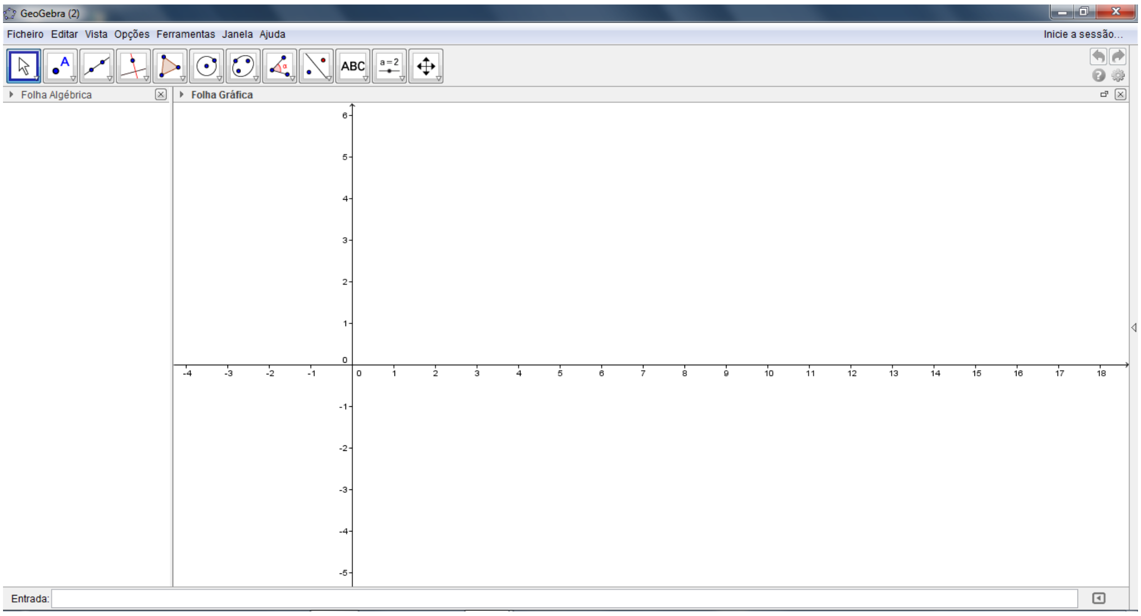
Fevereiro 2015

**Guião GeoGebra**

NOME: ______________________________________________ TURMA _____

**Ao iniciares…**

Quando abrires o GeoGebra deverás encontrar uma janela semelhante a esta.



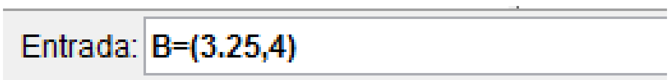

**Introduzir pontos, funções, retas…**

Se quiseres introduzir uma função, um ponto ou uma reta deves escrever o que pretendes onde diz “Entrada”


- Se quiseres introduzir o **ponto** $A(1,2)$ deves escrever na “Entrada”: A=(1,2) e em seguida clica “Enter” (Nota: Os pontos têm de ser escritos com letra maiúscula).

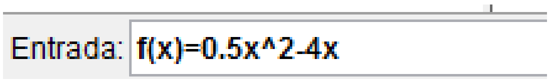
- Se quiseres introduzir o **ponto** $B(3{,}25;4)$ deves escrever na “Entrada”: B=(3.25,4) e em seguida clica em “Enter”

Nota: A vírgula dos números decimais deve ser escrita com um ponto.




- Se quiseres introduzir uma **função** deves escrever na “Entrada” como se exemplifica na imagem e em seguida clicar em “Enter”.

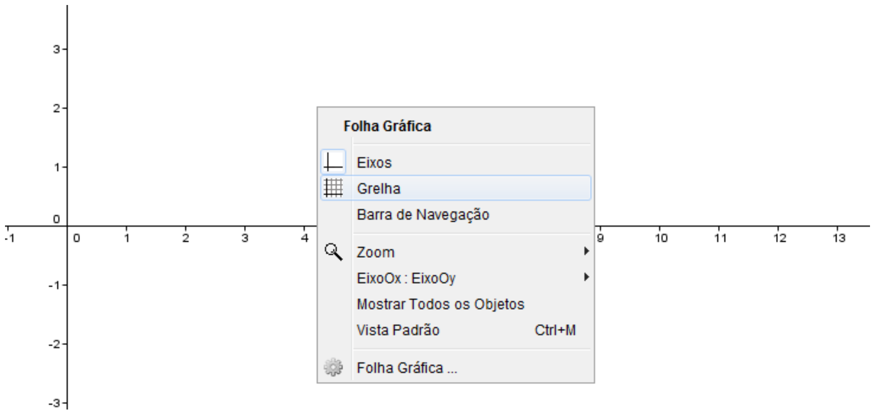
Nota: Quando quiseres escrever uma potência utiliza o símbolo ^



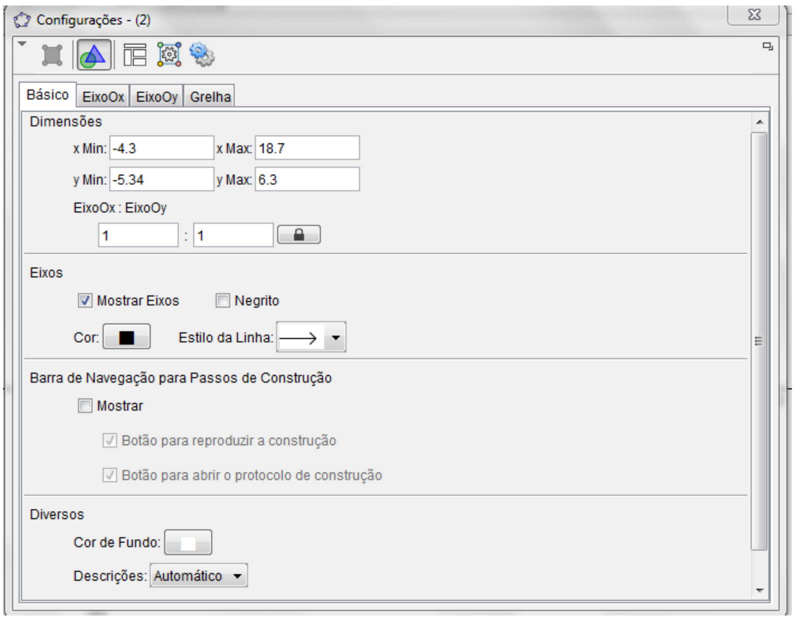

- Se quiseres introduzir uma **reta** $\boldsymbol{y = mx + b}$ deves escrever na “Entrada”: $y = mx + b$, com $m$ e $b$ que pretendas e em seguida clica em “Enter”


**Ajustar domínios, escalas…**

Se quiseres ajustar o domínio da função ou a escala do gráfico deves com o cursor na folha gráfica clicar no botão direito do rato e selecionar “Folha Gráfica”.

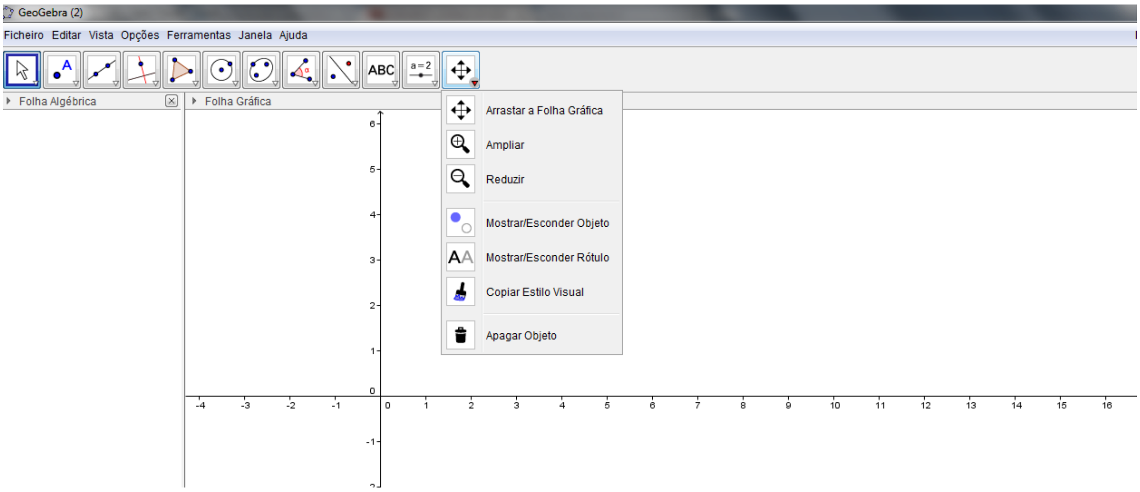



Irá aparecer-te a seguinte janela onde terás de introduzir os valores de $x$ e/ou $y$ que pretenderes.



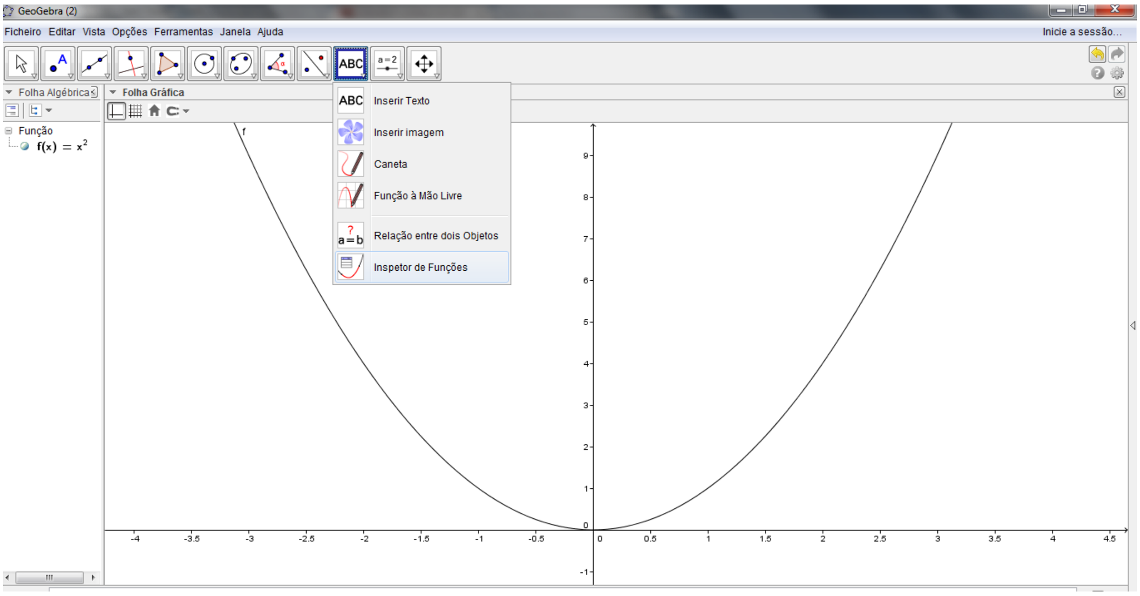
**Ampliar, reduzir, mover imagens ...**

Se quiseres ampliar, reduzir ou mover a imagem no teu ecrã deves selecionar a opção pretendida, como na imagem

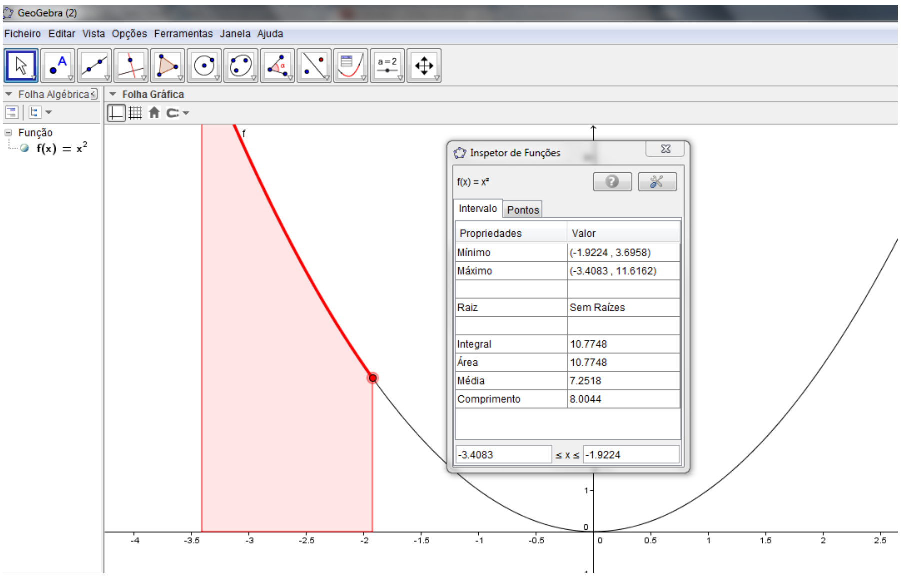



**Encontrar extremos, zeros...**

Se quiseres calcular máximos, mínimos, zeros, entre outros, de uma função recorre ao "Inspetor de Funções" como mostra a imagem seguinte.




Após clicares em "Inspetor de Funções" clica com o botão esquerdo em cima da curva da função. Em seguida aparecer-te-á uma imagem semelhante à seguinte

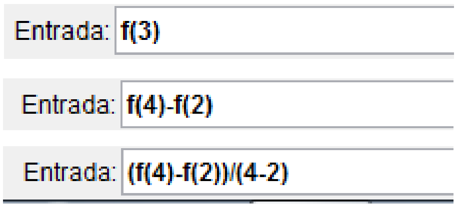



Para aumentares ou diminuíres a zona de inspeção (zona a vermelho) clica sobre a bola vermelha e arrasta-a para onde pretenderes.

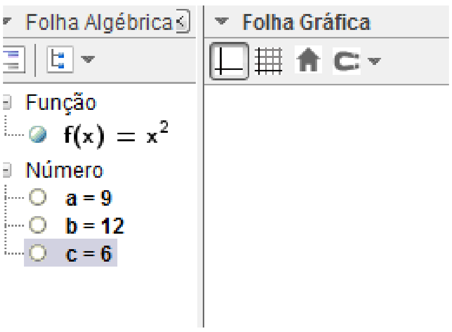
**Realizar operações com funções**

Podes realizar operações simples com funções, nomeadamente **determinar imagens**, **produtos, somas, diferenças** , entre outros, como nas imagens seguintes.

Nota: Atenção aos parêntesis, quando necessários, numa expressão com várias operações.

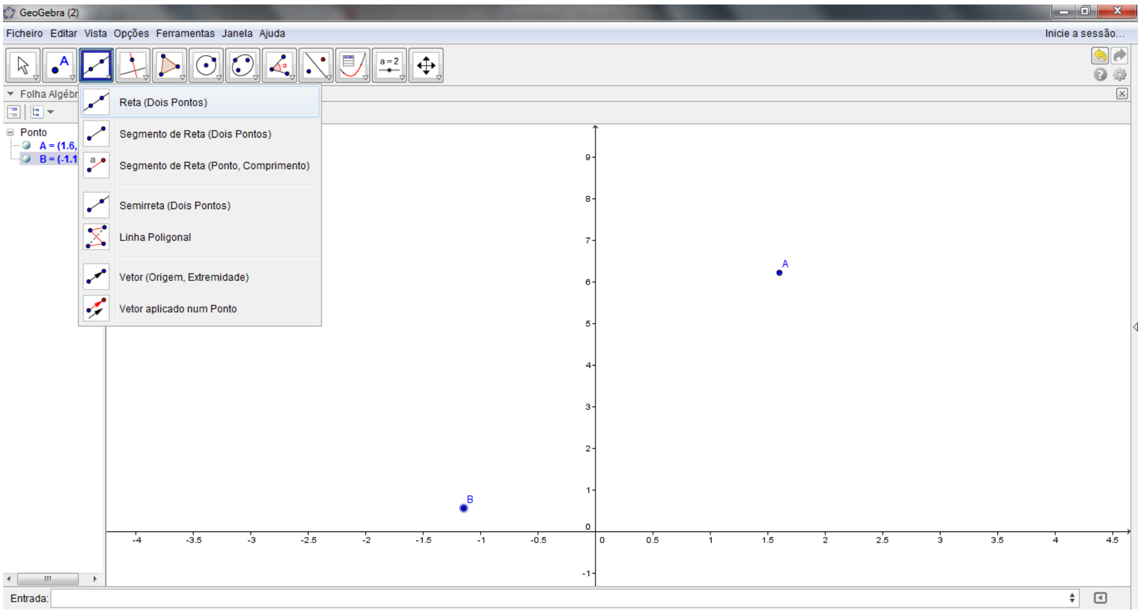



Os resultados destas operações irão aparecer na Folha Algébrica com uma apresentação do tipo: a=9, b=12….



**Construir retas, semirretas…**

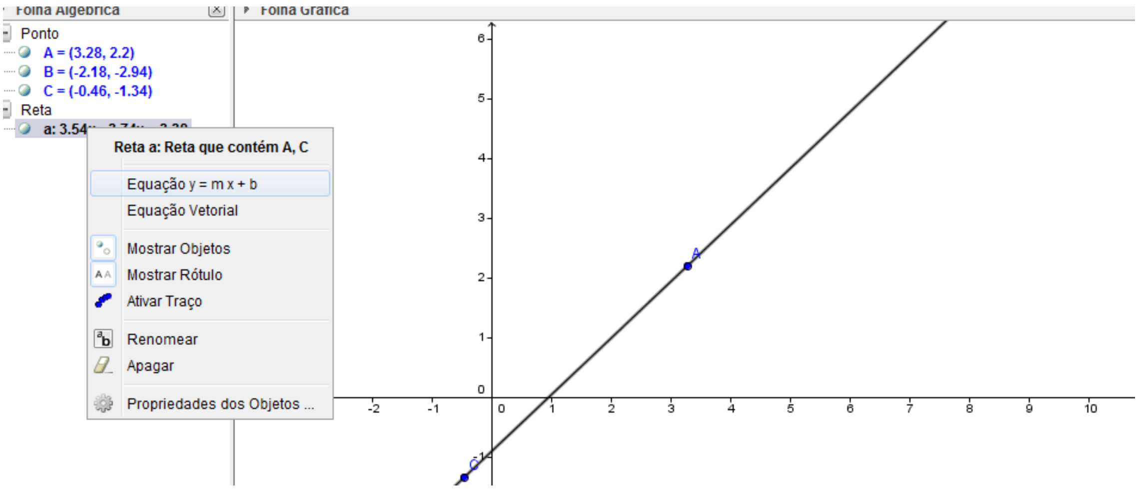
Para determinares uma reta dados dois pontos recorre ao ícone como na imagem




De seguida clica nos dois pontos que pretendes, um de cada vez.

Nota: Assim que clicares no primeiro ponto surgirá uma reta que deverás fixar clicando no segundo ponto.

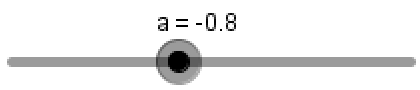
**<u>Importante:</u>** A equação que o GeoGebra te apresenta de uma reta não está escrita na forma de equação reduzida. Para tal deves clicar sobre a equação da reta dada e com o botão direito do rato selecionar a opção "Equação $y = mx + b$"




**Seletores…**

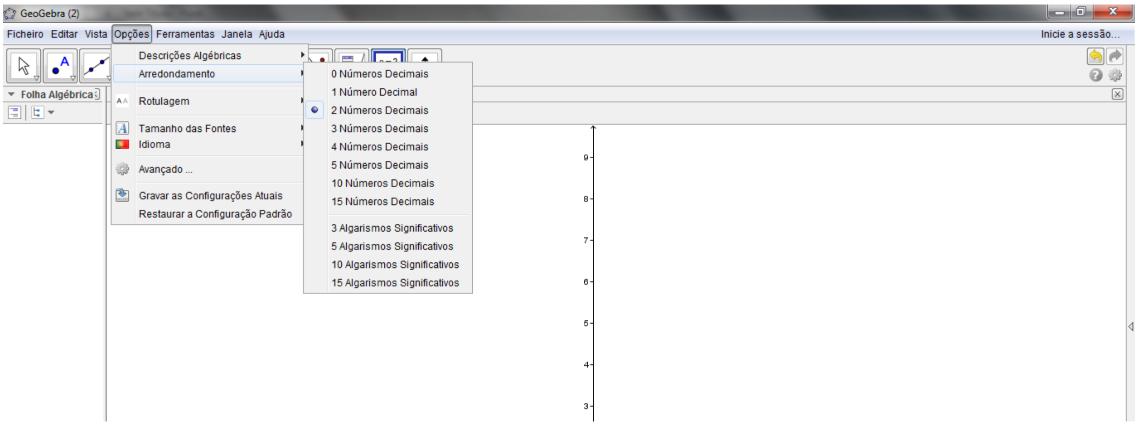
Dado um seletor $a$, podes alterar o valor de $a$ introduzindo na "Entrada": a=3, por exemplo e em seguida clicar em "Enter". Verás que o seletor muda automaticamente para o valor que introduziste, desde que o valor esteja no domínio do seletor.

Para fazeres variar o valor de $a$ diretamente no seletor, clica na bola preta e arrasta-a para a direita ou esquerda consoante o valor que pretendas.



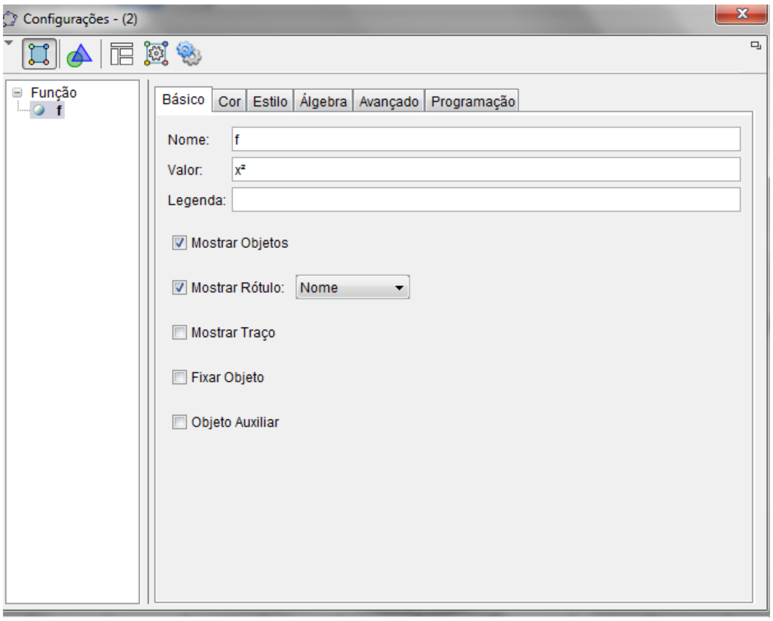

**Observações:**

Se for necessário alterar o **número de casas decimais** mostradas pelo GeoGebra deves clicar em "Opções" tal como na imagem.




Se for necessário **alterar cor, estilo** (linhas a tracejado, opacidade…) de um objeto, coloca o cursor no objeto e clica no botão direito do rato. Seleciona "Propriedades dos Objetos".

Aparecerá, em seguida, uma janela como na imagem onde selecionarás a opção que pretendes.



## 1.2. Planificação da 2ª Aula

Aula de 26 de fevereiro de 2015 – Plano de Aula

| | | |
|---|---|---|
| Matemática | Introdução ao Cálculo Diferencial I | Ano: 11º |

| **Sumário** |
|---|
| Continuação da resolução da tarefa de exploração iniciada na aula anterior. Noção de taxa de variação e interpretação geométrica: tarefa de exploração. Definição de derivada. |

| **Objetivos** |
|---|
| Compreender a noção de taxa de variação de uma função num determinado instante (derivada) e a sua interpretação geométrica. |

| **Recursos** | | | |
|---|---|---|---|
| **Professor** | Manual escolar<br>Tarefa "Estância de Ski" (Anexo 2.1)<br>Tarefa "Continuando na Estância de Ski" (Anexo 2.2)<br>Projetor<br>Computador Portátil | **Aluno** | Computador portátil<br>Tarefa "Estância de Ski" (Anexo 2.1)<br>Tarefa "Continuando na Estância de Ski" (Anexo 2.2)<br>Guião GeoGebra<br>Manual escolar |

| **Principais Tópicos e conceitos envolvidos** | **Capacidades Transversais** |
|---|---|
| Noção de taxa de variação. Interpretação geométrica da taxa de variação. Definição de derivada. | Comunicação Matemática<br>Raciocínio Matemático |

| **Metodologia de trabalho** |
|---|
| Interpretação geométrica da taxa média de variação através da resolução da parte II da tarefa "Estância de Ski", em pares, recorrendo ao *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Introdução do conceito de taxa de variação e derivada e respetiva interpretação geométrica através da resolução da tarefa de exploração "Continuando na Estância de Ski", em pares ou grupos de 3 elementos, recorrendo ao *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Discussão dos resultados em grande grupo e sistematização dos conceitos envolvidos. |

| Momentos da aula | Tempo Previsto – Aula 90 minutos |
|---|---|
| (1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas. | 5min |
| (2) Resolução da Parte II da Tarefa “Estância de Ski”[5] | 10min |
| (3) Apresentação e discussão dos resultados da Parte II[6] | 10min |
| (4) Sistematização das Aprendizagens[7] | 5min |
| (5) Apresentação da Tarefa “Continuando na Estância de Ski” | 5min |
| (6) Resolução da Parte I da Tarefa “Continuando na Estância de Ski” | 15min |
| (7) Apresentação e discussão dos resultados da Parte I | 10min |
| (8) Sistematização das aprendizagens | 10min |
| (9) Resolução da Parte II da Tarefa “Continuando na Estância de Ski” | 18min |
| (10) Encerramento da aula | 2min |

| Desenvolvimento da Aula |
|---|
| (1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos. |
| (2) Resolução da Parte II da Tarefa “Estância de Ski”<br>Os alunos resolverão autonomamente a Parte II da Tarefa “Estância de Ski”.<br><br>Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.<br>De uma forma geral, tal como a anterior, esta parte da tarefa não deverá implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que a maioria dos conceitos são bastante percetíveis e diretos. No entanto os alunos poderão mostrar algumas dificuldades no trabalho com o *software*, nomeadamente na representação das retas na questão 1.(b). Neste caso a professora deverá encaminhá-los mais uma vez para o guião fornecido no início da aula e caso persistam as dificuldades auxiliar os alunos no manuseamento do recurso. Os alunos poderão também mostrar dificuldades no preenchimento da tabela, no que se refere ao reconhecimento do declive. Neste caso a professora deverá questionar os alunos sobre a equação reduzida da reta $y = mx + b$ recordando-os do significado de $m$ e $b$.<br>Na última questão, caso os alunos mostrem dificuldades em conjeturar a relação entre a taxa média de variação de um intervalo $[a, b]$ e o declive da reta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, a professora deverá questioná-los sobre os valores registados nas tabelas anteriores e caso seja necessário fornecer mais exemplos.<br><br>Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.<br>Além de apoiar os alunos em eventuais dúvidas, a professora deverá tomar conhecimento das resoluções dos vários grupos para que, na fase de apresentação e discussão, caso exista alguma resolução particularmente interessante ou diferente das restantes, indique a esse(s) grupo(s) para ir ao quadro. |
| (3) Apresentação e discussão dos resultados da Parte II<br>Os alunos apresentarão as suas resoluções, que serão discutidas com a turma caso existam |

[5] Não concretizado na aula anterior
[6] Não concretizado na aula anterior
[7] Não concretizado na aula anterior

| | |
|---|---|
| | dúvidas ou resoluções diferentes.<br>Uma vez que as questões 1.(a) e 1.(b) dão particular ênfase à visualização através do *software*, a apresentação destas alíneas será feita projetando os ficheiros dos próprios alunos. De modo a facilitar a gestão de sala de aula, uma vez que os alunos têm de ligar os seus computadores ao projetor, o grupo que apresentar a resolução da 1.(a) apresentará também a 1.(b). Os colegas terão oportunidade de interagir colocando dúvidas, caso existam, e se tiveram representado pontos e/ou retas diferentes das que estão a ser apresentadas deverão dizê-lo e colocar as suas questões. No caso da questão 1.(c), se existirem diferentes conjeturas que a professora considere que devem ser discutidas com toda a turma, os grupos em questão apresentarão as suas conjeturas, justificando-as perante os colegas que poderão colocar questões.<br><br>O papel da professora será o de mediadora de aprendizagens e gestora das interações, proporcionando um papel central aos alunos. No entanto caso existam dúvidas generalizadas deverá intervir cuidando que toda a turma realize aprendizagens significativas. Além disso, no final da apresentação de cada questão deverá questionar a turma sobre eventuais dúvidas e particularmente na última questão deverá assegurar-se que todos os alunos interiorizaram a interpretação geométrica da taxa média de variação da função num determinado intervalo. |
| (4) | Sistematização das Aprendizagens<br>Será projetado um quadro referente à interpretação geométrica da taxa média de variação de uma função num intervalo $[a, b]$ que os alunos deverão registar no seu caderno diário. A professora deverá enfatizar a importância da interpretação geométrica e o seu significado. Caso ainda existam dúvidas sobre alguns dos conceitos abordados, os alunos deverão colocá-las neste momento sendo que a professora fará uma explicação para a turma. |
| (5) | Apresentação da Tarefa “Continuando na Estância de Ski”<br>Os alunos serão informados sobre a organização da aula, nomeadamente no que se refere à metodologia de trabalho. A professora relembrará a forma como os alunos devem utilizar o *software* de geometria dinâmica GeoGebra e indicará que devem recorrer ao guião de trabalho com o s*oftware* entregue na aula anterior. Além disso, a professora informará que a tarefa está dividida em duas partes e que só após a resolução e discussão da primeira parte será entregue a segunda.<br>Apesar de a tarefa ser realizada em pares (ou grupos de 3 elementos), cada aluno receberá uma tarefa que deverá entregar resolvida. Os alunos terão um breve momento para observar a tarefa e caso existam dúvidas generalizadas a professora deverá intervir de modo a que todos os alunos iniciem a tarefa nas mesmas condições. |
| (6) | Resolução da Parte I da Tarefa “Continuando na Estância de Ski”<br>Os alunos resolverão autonomamente a Parte I da Tarefa “Continuando na Estância de Ski”.<br><br>Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.<br>De uma forma geral as duas primeiras questões não deverão implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que são bastante percetíveis e diretas. No entanto, os alunos poderão mostrar algumas dificuldades no trabalho com o *software*, no que diz respeito especialmente à utilização do seletor. Neste caso a professora deverá encaminhá-los mais uma vez para o guião fornecido na aula anterior e, caso persistam as dificuldades, auxiliar os alunos no manuseamento do recurso. Poderão ainda surgir dificuldades na escolha dos valores de $h$, pelo que a professora deverá relembrar aos alunos a relação entre os intervalos anteriores (com amplitudes cada vez menores) de modo a que estes percebam que será essa a lógica que deverão usar na seleção dos valores de $h$. A última questão, 1.(c) poderá levantar algumas dúvidas uma vez que é uma questão mais aberta. Deste modo, caso surjam dúvidas nesta alínea, a professora deverá questionar os alunos acerca da relação entre os valores da taxa média de variação que calcularam e encaminhá-los para a conjetura correta fazendo questões como “De que valor é nos estamos a aproximar?”, “Quanto menor é a amplitude do intervalo o que podes dizer sobre a taxa média de variação?”. De modo a auxiliar os alunos nesta conjetura a professora poderá sugerir-lhes também que utilizem o seletor para que se apercebam que o valor da taxa média de variação tende para 1 quando $h$ tende para 0. |

Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.
Além de apoiar os alunos em eventuais dúvidas, a professora deverá tomar conhecimento das resoluções dos vários grupos para que, na fase de apresentação e discussão, caso exista alguma resolução particularmente interessante ou diferente das restantes, indique a esse(s) grupo(s) para ir ao quadro.

(7) Apresentação e discussão dos resultados da Parte I

Os alunos apresentarão no quadro as suas resoluções, que serão discutidas com a turma caso existam dúvidas ou resoluções diferentes.
Com exceção da questão 1.(c), um grupo (representado por um aluno) irá ao quadro expor a sua resolução. Neste momento os colegas terão oportunidade de interagir colocando dúvidas, caso existam, e o aluno em questão deverá explicar à turma o seu raciocínio. Tendo em conta que na questão 1.(b) os valores de $h$ poderão diferir de grupo para grupo, a professora deverá alertar os alunos para esse facto e explicar-lhes que o importante é que a lógica envolvida na escolha seja a mesma. Caso algum grupo tenha optado por uma lógica diferente e, mesmo com apresentação no quadro, continue com dúvidas, deverá colocar as suas questões de modo a ficar esclarecido. No caso da questão 1.(c), se existirem diferentes conjeturas que a professora considere que devem ser discutidas com toda a turma, os grupos em questão apresentarão as suas conjeturas, justificando-as perante os colegas que poderão colocar questões.

O papel da professora será o de mediadora de aprendizagens e gestora das interações, proporcionando um papel central aos alunos. No entanto caso existam dúvidas generalizadas deverá intervir cuidando que toda a turma realize aprendizagens significativas. Além disso, no final da apresentação de cada questão deverá questionar a turma sobre eventuais dúvidas e particularmente na última questão deverá assegurar-se que todos os alunos compreenderam para que valor tende a taxa média de variação, quando os intervalos têm amplitudes cada vez menores.

(8) Sistematização das aprendizagens

A professora deverá, na sequência da última questão apresentada, introduzir a terminologia "taxa de variação" no instante $t = 5$, e generalizar esta definição para qualquer instante $x = x_0$
Será então projetado um quadro referente à definição de taxa de variação de uma função para $x = x_0$ que os alunos deverão registar no seu caderno diário. A professora deverá enfatizar a importância deste conceito para toda a unidade de ensino e para a Matemática em geral. Deverá ainda realçar a nova terminologia que lhes é apresentada: "derivada". Tendo em conta as possíveis definições de taxa de variação (derivada) que os alunos terão de utilizar, a professora fará uma breve explicação da relação entre as duas definições, isto é, explicará o aparecimento de definição de derivada através do limite quando $x$ tende para $x_0$. Caso existam dúvidas sobre alguns dos conceitos abordados, os alunos deverão colocá-las neste momento sendo que a professora fará uma explicação para a turma.

(9) Resolução da Parte II da Tarefa "Continuando na Estância de Ski"

Os alunos resolverão autonomamente a Parte II da Tarefa "Continuando na Estância de Ski".

Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.
De uma forma geral, as duas primeiras questões não deverão implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que já na aula anterior os alunos representaram pontos e retas recorrendo ao GeoGebra. No entanto, caso os alunos mostrem algumas dificuldades no trabalho com o *software*, em especial na representação das retas na questão 1.(b), a professora deverá encaminhá-los mais uma vez para o guião fornecido na aula anterior e, caso persistam as dificuldades, auxiliar os alunos no manuseamento do recurso. Os alunos poderão também mostrar dificuldades no preenchimento da tabela, na alínea (i) no que se refere ao reconhecimento do declive. Neste caso a professora deverá relembrar o que foi feito na aula anterior e além disso questionar os alunos sobre a equação reduzida da reta $y = mx + b$,

recordando-os do significado de $m$ e $b$.
No caso da questão 1. (b) (ii) os alunos poderão mostrar algumas dificuldades em relacionar o declive das sucessivas retas com a taxa de variação no instante $t = 5$. Se tal acontecer a professora deverá questioná-los acerca dos pontos através dos quais definiram as respetivas retas encaminhando-os para a sucessiva "proximidade" ao ponto $A$. A professora questionará os alunos acerca da abcissa do ponto $A$ e pedir-lhes-á que relacionem esta informação com as suas conclusões na questão 1.(c) da Parte I. Desde modo, os alunos deverão compreender que à medida que nos aproximamos do ponto $A$, o declive tende para 1, o que vai ao encontro da taxa de variação para $t = 5$.
Na questão 1. (b) (iii) as principais dificuldades esperadas remetem para a utilização do *software* no sentido de fazer variar o valor de $h$. Neste caso a professora deverá encaminhá-los mais uma vez para o guião fornecido na aula anterior e, caso persistam as dificuldades, auxiliar os alunos no manuseamento do recurso.
Na questão 1.(c) caso os alunos mostrem dificuldades a encontrar a equação reduzida da reta para a representarem graficamente, a professora deverá questioná-los acerca do que aprenderam no 10º ano, nomeadamente sobre a forma de encontrar o valor de $b$. Na alínea (i) os alunos poderão evidenciar algumas dificuldades em designar corretamente a posição da reta $r$ relativamente ao gráfico de $f$. Neste caso, a professora deverá questioná-los acerca da reta $r$ e da forma como esta se relaciona com o gráfico de $f$. Poderá ainda perguntar-lhes se o gráfico de $f$ e a reta $r$ se tocam e neste caso em que ponto(s).
Na alínea (ii) é expectável que os alunos evidenciem algumas dificuldades em relacionar o declive da reta $r$ e o declive das retas consideradas anteriormente. Neste caso, a professora deverá questioná-los acerca da variação do declive das retas e do valor do qual este se aproxima. Deverá também fazer uma analogia com a taxa de variação, encaminhando os alunos para o uso do termo limite.
Na alínea (iii) caso os alunos mostrem dificuldades em interpretar, do ponto de vista geométrico, a taxa de variação da função $f$ no ponto $t = 5$ a professora deverá questioná-los sobre os valores registados nas tabelas anteriores e sobre a definição de taxa de variação. Além disso deverá relembrar-lhes o que foi feito na aula anterior, relativamente ao declive da reta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e a sua relação com a taxa média de variação no intervalo $[a, b]$.

Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.
Além de apoiar os alunos em eventuais dúvidas, a professora deverá tomar conhecimento das resoluções dos vários grupos para que, na fase de apresentação e discussão, caso exista alguma resolução particularmente interessante ou diferente das restantes, indique a esse(s) grupo(s) para ir ao quadro.

(10) Encerramento da aula

Os alunos serão informados do trabalho de casa.

**Comentário**

Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostos como extra:

- Tarefa 13 da página 64
- Exercícios 40, 41 e 42 da página 65

Caso os exercícios 40, 41 e 42 da página 65 não sejam realizados em aula, serão considerados trabalho de casa.

## 1.3. Planificação da 3ª Aula

Aula de 27 de fevereiro de 2015 – Plano de Aula

| | | |
|---|---|---|
| Matemática | Introdução ao Cálculo Diferencial I | Ano: 11º |

| Sumário |
|---|
| Continuação da resolução da tarefa de exploração iniciada na aula anterior. Taxa média de variação, taxa de variação e derivada: tarefas de aplicação. |

| Objetivos |
|---|
| Compreender interpretação geométrica de taxa de variação. Consolidar as noções de taxa média de variação, taxa de variação e derivada. |

| Recursos | | | |
|---|---|---|---|
| Professor | Tarefa "Continuando na Estância de Ski" (Anexo 2.2)<br>Manual escolar<br>Projetor<br>Computador Portátil | Aluno | Tarefa "Continuando na Estância de Ski" (Anexo 2.2)<br>Manual escolar<br>Calculadora gráfica<br>Computador Portátil |

| Principais Tópicos e conceitos envolvidos | Capacidades Transversais |
|---|---|
| Noção de taxa média de variação; cálculo da taxa média de variação. Noção de taxa de variação. Interpretação geométrica da taxa de variação. Definição de derivada. | Comunicação Matemática<br>Raciocínio Matemático |

| Metodologia de trabalho |
|---|
| Interpretação geométrica da taxa de variação através da resolução da parte II da tarefa "Continuando na Estância de Ski", em pares, recorrendo ao *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Os alunos trabalharão autonomamente na realização das tarefas de aplicação. O trabalho será realizado individualmente ou em pares, de acordo com a opção dos alunos, tendo em conta a disposição destes em sala de aula e os seus hábitos de trabalho. Em alguns momentos haverá lugar à apresentação, no quadro, do trabalho realizado. O exemplo do cálculo da equação reduzida da reta |

| |
|---|
| tangente de uma função num determinado ponto será feito em grande grupo. |

| Momentos da aula | Tempo Previsto – Aula 90 minutos |
|---|---|
| (1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas. | 5min |
| (2) Resolução da Parte II da Tarefa "Continuando na Estância de Ski"[8] | 15min |
| (3) Apresentação e discussão dos resultados da Parte II | 10min |
| (4) Sistematização das Aprendizagens | 10min |
| (5) Correção do trabalho de casa | 10min |
| (6) Exemplo do cálculo da equação reduzida da reta tangente ao gráfico de uma função num determinado ponto | 10min |
| (7) Resolução de tarefas do manual escolar | 28min |
| (8) Encerramento da aula | 2min |

| Desenvolvimento da Aula |
|---|
| (1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos. |
| (2) Resolução da Parte II da Tarefa "Continuando na Estância de Ski"<br>Os alunos resolverão autonomamente a Parte II da Tarefa "Continuando na Estância de Ski".<br><br>Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.<br>De uma forma geral, as duas primeiras questões não deverão implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que já na aula anterior os alunos representaram pontos e retas recorrendo ao GeoGebra. No entanto, caso os alunos mostrem algumas dificuldades no trabalho com o *software*, em especial na representação das retas na questão 1.(b), a professora deverá encaminhá-los mais uma vez para o guião fornecido na aula anterior e, caso persistam as dificuldades, auxiliar os alunos no manuseamento do recurso. Os alunos poderão também mostrar dificuldades no preenchimento da tabela, na alínea (i) no que se refere ao reconhecimento do declive. Neste caso a professora deverá relembrar o que foi feito na aula anterior e além disso questionar os alunos sobre a equação reduzida da reta $y = mx + b$, recordando-os do significado de $m$ e $b$.<br>No caso da questão 1. (b) (ii) os alunos poderão mostrar algumas dificuldades em relacionar o declive das sucessivas retas com a taxa de variação no instante $t = 5$. Se tal acontecer a professora deverá questioná-los acerca dos pontos através dos quais definiram as respetivas retas encaminhando-os para a sucessiva "proximidade" ao ponto $A$. A professora questionará os alunos acerca da abcissa do ponto $A$ e pedir-lhes-á que relacionem esta informação com as suas conclusões na questão 1.(c) da Parte I. Desde modo, os alunos deverão compreender que à medida que nos aproximamos do ponto $A$, o declive tende para 1, o que vai ao encontro da taxa de variação para $t = 5$.<br>Na questão 1. (b) (iii) as principais dificuldades esperadas remetem para a utilização do *software* no sentido de fazer variar o valor de $h$. Neste caso a professora deverá encaminhá-los mais uma vez para o guião fornecido na aula anterior e, caso persistam as dificuldades, auxiliar os alunos no manuseamento do recurso.<br>Na questão 1.(c) caso os alunos mostrem dificuldades a encontrar a equação reduzida da reta para a representarem graficamente, a professora deverá questioná-los acerca do que aprenderam no 10º ano, nomeadamente sobre a forma de encontrar o valor de $b$. Na alínea (i) os |

[8] Não concretizado totalmente na aula anterior

alunos poderão evidenciar algumas dificuldades em designar corretamente a posição da reta $r$ relativamente ao gráfico de $f$. Neste caso, a professora deverá questioná-los acerca da reta $r$ e da forma como esta se relaciona com o gráfico de $f$. Poderá ainda perguntar-lhes se o gráfico de $f$ e a reta $r$ se tocam e neste caso em que ponto(s).

Na alínea (ii) é expectável que os alunos evidenciem algumas dificuldades em relacionar o declive da reta $r$ e o declive das retas consideradas anteriormente. Neste caso, a professora deverá questioná-los acerca da variação do declive das retas e do valor do qual este se aproxima. Deverá também fazer uma analogia com a taxa de variação, encaminhando os alunos para o uso do termo limite.

Na alínea (iii) caso os alunos mostrem dificuldades em interpretar, do ponto de vista geométrico, a taxa de variação da função $f$ no ponto $t = 5$ a professora deverá questioná-los sobre os valores registados nas tabelas anteriores e sobre a definição de taxa de variação. Além disso deverá relembrar-lhes o que foi feito na aula anterior, relativamente ao declive da reta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ e a sua relação com a taxa média de variação no intervalo $[a, b]$.

Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.

Além de apoiar os alunos em eventuais dúvidas, a professora deverá tomar conhecimento das resoluções dos vários grupos para que, na fase de apresentação e discussão, caso exista alguma resolução particularmente interessante ou diferente das restantes, indique a esse(s) grupo(s) para ir ao quadro.

(3) Apresentação e discussão dos resultados da Parte II

Os alunos apresentarão as suas resoluções, que serão discutidas com a turma caso existam dúvidas ou resoluções diferentes.

Uma vez que as questões 1.(a) e 1.(b) dão particular ênfase à visualização através do *software*, a apresentação destas alíneas será feita projetando os ficheiros dos próprios alunos. De modo a facilitar a gestão de sala de aula, uma vez que os alunos têm de ligar os seus computadores ao projetor, o grupo que apresentar a resolução da 1.(a) apresentará também a 1.(b). Os colegas terão oportunidade de interagir colocando dúvidas, caso existam, e se tiveram representado pontos e/ou retas diferentes das que estão a ser apresentadas deverão dizê-lo e colocar as suas questões. No caso da questão 1.(b)(iii) um grupo de alunos (representado por um aluno) irá projetar o seu ficheiro e mostrar a variação das sucessivas retas, concluindo a relação pretendida. Na questão 1.(c) um grupo projetará a reta que representou recorrendo ao GeoGebra e escreverá no quadro a equação reduzida da reta $r$, justificando todos os cálculos. Nas questões 1.(c)(ii) e (iii) se existirem diferentes conclusões que a professora considere que devem ser discutidas com toda a turma, os grupos em questão apresentarão as suas conjeturas, justificando-as perante os colegas que poderão colocar questões se sentirem essa necessidade.

O papel da professora será o de mediadora de aprendizagens e gestora das interações, proporcionando um papel central aos alunos. No entanto, caso existam dúvidas generalizadas deverá intervir cuidando que toda a turma realize aprendizagens significativas. Além disso, no final da apresentação de cada questão deverá questionar a turma sobre eventuais dúvidas e particularmente na última questão deverá assegurar-se que todos os alunos interiorizaram a interpretação geométrica da taxa de variação da função num determinado instante.

(4) Sistematização das Aprendizagens

Será projetado um quadro referente à interpretação geométrica da taxa de variação de uma função num determinado instante que os alunos deverão registar no seu caderno diário. A professora deverá enfatizar a importância da interpretação geométrica e o seu significado. Caso existam dúvidas sobre alguns dos conceitos abordados, os alunos deverão colocá-las neste momento sendo que a professora fará uma explicação para a turma.

(5) Correção do trabalho de casa

Neste momento serão contemplados os exercícios 34, 38 respetivamente das páginas 60 e 61 do manual escolar. Caso alguma(s) desta(s) tarefa(s) não tenha(m) sido realizada(s) nas aulas

| | |
|---|---|
| | anteriores será(ão) realizada(s) neste momento. Se tiverem sido consideradas trabalho de casa e existirem dúvidas será feita a sua correção. Em ambos os casos vários alunos irão ao quadro apresentar as suas resoluções que deverão explicar aos colegas.<br>Caso a professora se aperceba de dúvidas generalizadas deverá intervir fazendo uma explicação para toda a turma. |
| (6) | Exemplo do cálculo da equação reduzida da reta tangente ao gráfico de uma função num determinado ponto<br>Este momento tem por base a importância que o cálculo da equação da reta tangente ao gráfico de uma função num determinado ponto tem para toda a unidade de ensino e para o estudo de derivadas em geral. Além disso, tendo em conta que os alunos não estão familiarizados com a manipulação de cálculos com limites a professora fará o primeiro exemplo deste tipo de exercício de modo a fornecer aos alunos as ferramentas necessárias para o trabalho autónomo no futuro.<br>Assim, a professora fará, no quadro, em interação com os alunos, o exercício resolvido 1. da página 65 da manual escolar. A professora escreverá a função $f(x) = 2x^2 - 3$ e indicará que irá calcular uma equação da reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa 2. Inicialmente, a professora questionará os alunos acerca dos seus conhecimentos sobre a relação entre a equação da reta tangente e a derivada de uma função num ponto. Além disso, pedirá aos alunos que recordem a definição de derivada dada na aula anterior. Em seguida, procederá ao cálculo de $f'(2)$ através do limite quando $h$ tende para zero, que será o declive da reta pretendida. Posteriormente calculará o valor da ordenada na origem de forma através do processo de substituição que os alunos conhecem desde o 10. º ano de escolaridade.<br><br>Os alunos deverão registar este exemplo no seu caderno diário e caso existam dúvidas deverão colocá-las de modo a que a professora faça uma explicação para toda a turma. |
| (7) | Resolução de tarefas do manual escolar<br>Os alunos resolverão autonomamente, pela seguinte ordem, os exercícios 43 da página 65, 44 e 45 da página 66, Proposta 2 e 4 da página 136.<br><br>Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.<br>De uma forma geral, as dificuldades previstas relacionam-se com a manipulação algébrica dos cálculos com limites e com o cálculo da equação da reta tangente. Caso os alunos mostrem estas dificuldades a professora deverá relembrar-lhes o exemplo foi feito anteriormente e encaminhá-los para a leitura da página 65. Caso os alunos evidenciem dificuldades no cálculo da taxa média de variação a professora deverá questioná-los acerca do que foi feito nas duas aulas anteriores e se for necessário encaminhá-los para as páginas 60 e 61 do manual.<br>Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma. |
| (8) | Encerramento da aula<br>Os alunos serão informados do trabalho de casa. |

| **Comentário** |
|---|
| Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma será proposta como extra a Tarefa 14 da página 67 do manual.<br>Caso alguma das tarefas propostas para a aula não seja realizada será considerada trabalho de casa. |

## 1.4. Planificação da 4ª Aula

Aula de 2 de março de 2015 – Plano de Aula

| Matemática | Introdução ao Cálculo Diferencial I | Ano: 11º |
|---|---|---|

| Sumário |
|---|
| Correção do trabalho de casa.<br>Função Derivada: tarefa de exploração.<br>Derivada de algumas funções. Resolução de exercícios do manual escolar. |

| Objetivos |
|---|
| Consolidar as noções de taxa média de variação, taxa de variação e derivada. Compreender a noção de derivada enquanto função. Calcular a função derivada das funções polinomiais de 2.º grau. |

| Recursos | | | |
|---|---|---|---|
| Professor | Manual escolar<br>Tarefa "Derivando ponto a ponto" (Anexo 2.3)<br>Projetor<br>Computador Portátil<br>Calculadora gráfica | Aluno | Manual escolar<br>Tarefa "Derivando ponto a ponto"(Anexo 2.3)<br>Calculadora gráfica |

| Principais Tópicos e conceitos envolvidos | Capacidades Transversais |
|---|---|
| Determinação da derivada em casos simples: função afim, funções polinomiais do 2.º e 3.º grau | Comunicação Matemática<br>Raciocínio Matemático |

| Metodologia de trabalho |
|---|
| Introdução ao conceito de função derivada através da resolução da tarefa de |

| |
|---|
| exploração "Derivando ponto a ponto", em pares ou grupos de 3 elementos, recorrendo à calculadora gráfica. Discussão dos resultados em grande grupo e sistematização dos conceitos envolvidos. Determinação da função derivada da função $f(x) = ax^2$ em grande grupo. |

| **Momentos da aula** | **Tempo Previsto – Aula 90 minutos** |
|---|---|
| (1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas. | 5min |
| (2) Correção do trabalho de casa[9] | 15min |
| (3) Resolução de uma tarefa do manual escolar e apresentação dos resultados[10] | 18min |
| (4) Apresentação da Tarefa "Derivando ponto a ponto" | 5min |
| (5) Resolução da Tarefa "Derivando ponto a ponto" | 15min |
| (6) Apresentação e discussão dos resultados da Tarefa | 10min |
| (7) Sistematização das Aprendizagens | 10min |
| (8) Determinação da função derivada da função polinomial $f(x) = ax^2$ | 10min |
| (9) Encerramento da aula | 2min |

| **Desenvolvimento da Aula** |
|---|
| (1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos. |
| (2) Correção do trabalho de casa<br>Neste momento serão contemplados os exercícios 40, 41 e 42 da página 63 do manual escolar. Caso alguma(s) desta(s) tarefa(s) não tenha(m) sido realizada(s) nas aulas anteriores será(ão) realizada(s) neste momento. Se tiverem sido consideradas trabalho de casa e existirem dúvidas será feita a sua correção. Em ambos os casos vários alunos irão ao quadro apresentar as suas resoluções que deverão explicar aos colegas.<br>Caso a professora se aperceba de dúvidas generalizadas deverá intervir fazendo uma explicação para toda a turma. |
| (3) Resolução de uma tarefa do manual escolar e apresentação dos resultados<br>Os alunos resolverão autonomamente o exercício 43 da página 65 do manual escolar.<br><br>Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.<br>Como este será o primeiro exercício em que os alunos terão de determinar a equação reduzida de uma reta tangente a um gráfico de uma função, os alunos poderão mostrar dificuldades em |

[9] Alguns exercícios não realizados na aula anterior foram considerados trabalho de casa.
[10] Não concretizado na aula anterior

iniciar o mesmo. Neste caso, a professora deverá questionar os alunos acerca dos seus conhecimentos sobre a interpretação geométrica da taxa de variação, encaminhando-os para o que foi feito na tarefa "Continuando na Estância de Ski" e relembrando-os acerca do que foi feita na aula anterior, no exemplo onde foi determinada uma equação reduzida de uma reta tangente a um gráfico de uma função. Os alunos também poderão demonstrar dificuldade no cálculo do limite, pois é a primeira vez que estes de forma autónoma usarão a definição de derivada. Neste caso, a professora deverá, mais uma vez, relembrar o que foi feito no exemplo da aula anterior, questionando-os sobre o significado de $g(1+h)$.

Depois deste momento de trabalho autónomo um aluno irá ao quadro apresentar a sua resolução, que deverá explicar aos colegas.
Caso a professora se aperceba de dúvidas generalizadas deverá intervir fazendo uma explicação para toda a turma.

(4) Apresentação da Tarefa "Derivando ponto a ponto"
Os alunos serão informados sobre a organização da aula, nomeadamente no que se refere à metodologia de trabalho. A professora indicará que a forma como os alunos devem utilizar a calculadora gráfica estará especificada na tarefa.
Apesar de a tarefa ser realizada em pares (ou grupos de 3 elementos), cada aluno receberá uma tarefa. Os alunos terão um breve momento para observar a tarefa e caso existam dúvidas generalizadas a professora deverá intervir de modo a que todos os alunos iniciem a tarefa nas mesmas condições.

(5) Resolução da Tarefa "Derivando ponto a ponto"
Os alunos resolverão autonomamente a Tarefa "Derivando ponto a ponto".

Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.
De uma forma geral as três primeiras questões da tarefa não deverão implicar muitas dúvidas e/ou dificuldades uma vez que são bastante percetíveis e diretas. No entanto, os alunos poderão mostrar algumas dificuldades no trabalho com a calculadora gráfica. Neste caso a professora deverá encaminhá-los para a explicação apresentada na tarefa e caso persistam as dificuldades auxiliar os alunos no manuseamento do recurso.
A última questão, 1.(d) poderá levantar algumas dúvidas uma vez que é uma questão mais aberta a que os alunos não estão tão acostumados. Deste modo, caso surjam dúvidas nesta alínea, a professora deverá questionar os alunos acerca da relação entre os valores de $x$ e o declive da reta tangente com os quais preencheram a tabela da alínea anterior.
Caso os alunos tenham dificuldades em perceber que o declive da reta tangente num determinado ponto de abcissa $x$ é o dobro de $x$ a professora deverá encaminhar os alunos para a observação da tabela anterior colocando questões acerca da relação entre os valores encontrados.

Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.

(6) Apresentação e discussão dos resultados da Tarefa
Os alunos apresentarão no quadro as resoluções das questões (c) e (d), que serão discutidas com a turma caso existam dúvidas ou resoluções diferentes.
Tendo em conta que na questão 1.(c) os valores de $x$ (e o declive da respetiva reta tangente) poderão diferir de grupo para grupo, a professora deverá alertar os alunos para esse facto e explicar-lhes que o importante é que a relação estabelecida entre os valores seja a mesma. Caso algum grupo tenha conjeturado uma relação diferente e, mesmo com apresentação no quadro,

| | |
|---|---|
| | continue com dúvidas, deverá colocar as suas questões de modo a ficar esclarecido.<br>No caso da questão 1.(d), se existirem diferentes conjeturas que a professora considere que devem ser discutidas com toda a turma, os grupos em questão apresentarão as suas conjeturas, justificando-as perante os colegas que poderão colocar questões se sentirem essa necessidade.<br>O papel da professora será o de mediadora de aprendizagens e gestora das interações, proporcionando um papel central aos alunos. No entanto caso existam dúvidas generalizadas deverá intervir cuidando que toda a turma realize aprendizagens significativas. Além disso, no final da apresentação de cada questão deverá questionar a turma sobre eventuais dúvidas e particularmente na última questão deverá assegurar-se que todos os alunos compreenderam a relação entre o valor da abcissa $x$ de cada ponto e o valor do declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto e escreveram corretamente a expressão que representa essa relação. |
| (7) | Sistematização das aprendizagens<br>A professora, tendo em conta o que foi feito na última alínea da tarefa, deverá enfatizar que uma vez que a cada valor $x$ pertencente ao domínio de uma função $f$ corresponde o valor da derivada em $x$ então a própria derivada é uma função.<br>Será projetado um quadro referente à definição de derivada enquanto função, que os alunos deverão registar no seu caderno diário. Caso os alunos tenham dúvidas neste momento a professora fará uma explicação para a turma. |
| (8) | Determinação da função derivada da função polinomial $f(x) = ax^2$<br>A professora, tendo em conta que o conceito de função derivada foi introduzido através da função $x^2$, fará a demonstração, através da definição, da derivada de uma função $f(x) = ax^2$.<br>Ao longo de todo este momento a professora estará em interação com os alunos, questionando-os ao longo da demonstração.<br>Os alunos deverão registar esta demonstração no seu caderno diário.<br><br>Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma. |
| (9) | Encerramento da aula<br>Os alunos serão informados do trabalho de casa. |

| **Comentário** |
|---|
| Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostas como extra os exercícios 44 e 45 da página 66 do manual escolar.<br>O exercício 50 da página 73 será considerado trabalho de casa. |

## 1.5. Planificação da 5ª Aula

Aula de 5 de março de 2015 – Plano de Aula

| | | |
|---|---|---|
| Matemática | Introdução ao Cálculo Diferencial I | Ano: 11º |

| **Sumário** |
|---|
| Derivada de algumas funções. Derivada da função $\frac{1}{x}$. Generalização da derivada de funções racionais do tipo $a + \frac{b}{x-c}$. Esclarecimento de dúvidas para a ficha de avaliação. Resolução de exercícios do manual escolar. |

| **Objetivos** |
|---|
| Calcular a função derivada da função afim, funções polinomiais de 2.º e 3.º grau e de funções racionais. Consolidar conceitos abordados nas aulas anteriores. |

| **Recursos** | | | |
|---|---|---|---|
| **Professor** | Manual escolar<br>Projetor<br>Computador Portátil | **Aluno** | Manual escolar |

| **Principais Tópicos e conceitos envolvidos** | **Capacidades Transversais** |
|---|---|
| Determinação da derivada em casos simples: função afim, funções polinomiais do 2.º e 3.º grau, função racional do 1.º grau | Comunicação Matemática<br>Raciocínio Matemático |

| **Metodologia de trabalho** |
|---|
| Função derivada de uma função afim, da função polinomial de 2º grau completa e da função polinomial de 3º grau, em grande grupo. Trabalho autónomo dos alunos na determinação da derivada da função $\frac{1}{x}$. Generalização da derivada de funções racionais do tipo $a + \frac{b}{x-c}$, em grande grupo. Trabalho autónomo dos alunos na |

| |
|---|
| resolução de exercícios do manual escolar referentes à derivada das funções estudadas. De forma autónoma os alunos esclarecerão dúvidas para a ficha de avaliação ou resolverão exercícios sobre os conceitos abordados nas aulas anteriores. |

| **Momentos da aula** | **Tempo Previsto – Aula 90 minutos** |
|---|---|
| (1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas. | 5min |
| (2) Indicação das funções derivadas das funções afim, polinomiais de 2.º grau completas e polinomiais de 3.º grau | 10min |
| (3) Determinação da derivada da função $\frac{1}{x}$ | 10min |
| (4) Generalização da derivada de funções racionais do tipo $a + \frac{b}{x-c}$ | 10min |
| (5) Resolução de exercícios do manual escolar | 13min |
| (6) Esclarecimento de dúvidas para a ficha de avaliação/Resolução de exercícios | 40min |
| (7) Encerramento da aula | 2min |

| **Desenvolvimento da Aula** |
|---|
| (1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos. |
| (2) Indicação das funções derivadas das funções afim, polinomiais de 2.º grau completas e polinomiais de 3.º grau<br>A professora indicará que, de modo semelhante ao que foi feito anteriormente, é possível determinar a derivada de vários tipos de funções nomeadamente da função afim. Deste modo, fará uma breve explicação sobre a origem da derivada deste tipo de funções e, em particular, da função constante, sendo que posteriormente os alunos deverão registar no seu caderno o quadro da página 72 do manual escolar.<br>Tendo em conta que no momento anterior foi feita a demonstração apenas para a função $ax^2$, a professora generalizará a função derivada para as funções polinomiais de 2.º grau completas. Esta generalização será feita em interação com os alunos e a professora deverá relacionar esta derivada com as determinadas anteriormente, introduzindo, ainda que intuitivamente, a ideia de derivada de soma de funções. Em seguida os alunos deverão registar os quadros das páginas 74 e 75.<br>Também através de uma breve explicação sobre a sua origem, a professora indicará a função derivada de uma função polinomial de 3.º grau e os alunos deverão registar no seu caderno os quadros da página 76 do manual.<br><br>Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma. |
| (3) Determinação da derivada da função $\frac{1}{x}$<br>Neste momento a professora escreverá no quadro a função $f(x) = \frac{1}{x}$ e indicará aos alunos que deverão determinar individualmente (ou em pares) a derivada desta função utilizando a definição de derivada.<br><br>Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades. Caso os alunos evidenciem dificuldades em recordar a definição, a professora deverá questioná-los acerca do que foi feito na aula anterior e encaminhá-los para os seus registos no caderno diário. Se os alunos revelarem |

dificuldades nos cálculos, a professora deverá, mais uma vez, relembrar-lhes o que foi feito nas aulas anteriores. Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.

Depois deste momento de trabalho autónomo, um aluno irá ao quadro apresentar a sua resolução que deverá explicar aos colegas, caso existam dúvidas. Se mesmo assim as dúvidas persistirem a aula será interrompida e a professora fará uma explicação para a turma.

(4) Generalização da derivada de funções racionais do tipo $a + \frac{b}{x-c}$

Tendo em conta a derivada da função $\frac{1}{x}$ determinada no momento anterior, a professora, em interação com a turma, generalizará a derivada das funções do tipo $\frac{a}{x}$ para $a \in \mathbb{R}$. Os alunos deverão registar a derivada deste tipo de funções no seu caderno diário e posteriormente a professora generalizará a derivada para funções do tipo $a + \frac{b}{x-c}$, para $a, b, c \in \mathbb{R}$. Os alunos deverão, mais uma vez, registar esta derivada e será feito um exemplo no quadro que estes também deverão registar. Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.

(5) Resolução de exercícios do manual escolar

Os alunos resolverão autonomamente as alíneas 48.1, 48.4, 57.1, 57.4, 58.1, 58.5, 62.1, 62.6 e 63 respetivamente das páginas 72, 75, 76 e 79.

Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades. De uma forma geral, são exercícios bastante simples de aplicação, no entanto, caso existam dúvidas, a professora deverá encaminhar os alunos para as funções derivadas que registaram anteriormente.
No exercício 63.1 se os alunos evidenciarem dificuldade em mostrar a igualdade pretendida a professora deverá questioná-los acerca do algoritmo da divisão que utilizaram para funções racionais desde o início do período. Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.

(6) Esclarecimento de dúvidas para a ficha de avaliação/Resolução de exercícios

Uma vez que na aula seguinte os alunos realizarão uma ficha de avaliação, esta segunda metade da aula será dedicada ao esclarecimento de eventuais dúvidas que os alunos possam ter relativamente aos tópicos abordados ao longo de todo o ano letivo.

Os alunos que não pretendam esclarecer dúvidas deverão realizar alguns exercícios que englobem os conceitos lecionados até ao momento na unidade de ensino, nomeadamente os exercícios referentes à determinação de derivadas de algumas funções.

Neste momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar os alunos em eventuais dúvidas, independentemente da opção destes.

(7) Encerramento da aula

Os alunos serão informados que caso tenham dúvidas para a ficha de avaliação poderão contactar a professora por via eletrónica.

| **Comentário** |
|---|
| Caso existam alunos que já tenham resolvido os exercícios do manual referentes aos tópicos lecionados até ao momento, a professora indicará que poderão resolver as questões 1. a 5. das páginas 130 e 131 e as propostas 3,5,6,7,8 e 9 das páginas 136 e 137 do manual escolar. |

## 1.6. Planificação da 6ª Aula

Aula de 6 de março de 2015 – Plano de Aula

| | | |
|---|---|---|
| Matemática | Introdução ao Cálculo Diferencial I | Ano: 11º |

| Sumário |
|---|
| Ficha de avaliação sumativa. |

| Objetivos |
|---|
| Consolidar e testar os tópicos lecionados desde o início do ano letivo. |

| Recursos | | | |
|---|---|---|---|
| Professor | Ficha de avaliação (Anexo 3.1) | Aluno | Ficha de avaliação (Anexo 3.1)<br>Calculadora gráfica |

| Principais Tópicos e conceitos envolvidos | Capacidades Transversais |
|---|---|
| Resolução de problemas que envolvam triângulos;<br>Equações trigonométricas elementares;<br>Produto escalar de dois vetores no plano e no espaço: definição e propriedades;<br>Perpendicularidade de vetores e de retas; equação cartesiana do plano definido por um ponto e o vetor normal;<br>Interseção de planos e interpretação geométrica: resolução de sistemas; equações cartesianas da reta no espaço;<br>Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos (interpretação vetorial);<br>Estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, para a seguinte classe | Comunicação Matemática<br>Raciocínio Matemático |

| | |
|---|---|
| de funções: $f(x) = a + \frac{b}{cx+d}$;<br>Conceito intuitivo de limite, de $+\infty$ e de $-\infty$;<br>Noção de taxa média de variação; cálculo da taxa média de variação. Noção de taxa de variação; obtenção da taxa de variação em casos simples;<br>Interpretação geométrica da taxa de variação; definição de derivada (recorrendo à noção intuitiva de limite); | |

| **Metodologia de trabalho** |
|---|
| Trabalho autónomo dos alunos, individualmente, na resolução da ficha de avaliação. |

| Momentos da aula | Tempo Previsto – Aula 90 minutos |
|---|---|
| (1) Entrada dos alunos. Registo das faltas. | 3min |
| (2) Resolução da Ficha de avaliação | 87min |
| (3) Encerramento da aula | 1min |

| Desenvolvimento da Aula |
|---|
| (1) Registo das presenças dos alunos<br>Neste momento a professora verificará se os alunos estão sentados corretamente e se têm o material necessário para a realização da ficha de avaliação.<br>Ainda neste momento a professora entregará os enunciados da ficha de avaliação aos alunos e dará início à realização desta. |
| (2) Resolução da Ficha de avaliação<br>Os alunos realizarão autonomamente a ficha de avaliação. |
| (3) Encerramento da aula<br>Os alunos serão informados que terminou o tempo para a realização da ficha de avaliação e que terão de a entregar à professora. |

## 1.7. Planificação da 7ª Aula e Ficha Síntese

Aula de 10 de março de 2015 – Plano de Aula

| Matemática | Introdução ao Cálculo Diferencial I | Ano: 11º |
|---|---|---|

| Sumário |
|---|
| Derivada da função módulo. Resolução de uma ficha de trabalho. |

| Objetivos |
|---|
| Calcular a derivada da função módulo. Consolidar os conceitos abordados nas aulas anteriores. |

| Recursos | | | |
|---|---|---|---|
| Professor | Manual escolar<br>Ficha de Trabalho nº 1 (Anexo 2.4)<br>Ficha Síntese sobre derivadas<br>Projetor<br>Computador Portátil | Aluno | Manual escolar<br>Ficha de Trabalho nº 1 (Anexo 2.4)<br>Ficha Síntese sobre derivadas |

| Principais Tópicos e conceitos envolvidos | Capacidades Transversais |
|---|---|
| Derivadas de algumas funções: função módulo. | Comunicação Matemática<br>Raciocínio Matemático |

| Metodologia de trabalho |
|---|
| Trabalho autónomo dos alunos, na resolução da ficha de trabalho. Determinação da derivada da função módulo, em grande grupo. |

| Momentos da aula | Tempo Previsto – Aula 90 minutos |
|---|---|
| (1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas. | 5min |
| (2) Resolução da ficha de trabalho nº 1 (Questões 1 a 7) e apresentação dos resultados | 45min |
| (3) Determinação da derivada da função módulo | 20min |
| (4) Resolução da questão 8 da ficha de trabalho nº 1 e | 18min |

| | | |
|---|---|---|
| | apresentação dos resultados | |
| (5) | Encerramento da aula | 2min |

| | |
|---|---|
| | **Desenvolvimento da Aula** |
| (1) | Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos. |
| (2) | Resolução da ficha de trabalho nº 1 (Questões 1 a 7) e apresentação dos resultados<br>Os alunos realizarão autonomamente uma ficha de trabalho com o objetivo de consolidar os conceitos abordados nas aulas anteriores.<br><br>Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades. De uma forma geral, tendo em conta que a maioria das questões da ficha tem por base a determinação de derivadas, os alunos poderão evidenciar algumas dificuldades na aplicação das regras de derivação já lecionadas. Deste modo, a professora deverá encaminhá-los para o quadro, onde serão projetadas as mesmas regras, ou para os seus próprios cadernos diários onde já as registaram.<br>Na questão 1. os alunos poderão ter dificuldade em relacionar a equação da reta tangente e a definição de derivada. Neste caso, a professora deverá questioná-los acerca dos seus conhecimentos sobre a interpretação geométrica de derivada num ponto e a própria definição de derivada. Se mesmo assim as dúvidas persistirem, a professora deverá encaminhar os alunos para a página 63 do manual escolar.<br>Algumas das questões da ficha têm como objetivo escrever a equação da reta tangente ao gráfico de uma função num determinado ponto, assim, caso os alunos evidenciem dificuldades na determinação da equação, o procedimento da professora será semelhante, questionando os alunos sobre a relação entre a reta tangente num determinado ponto e a derivada nesse ponto. Se mesmo assim as dúvidas persistirem, a professora deverá encaminhar os alunos para a página 63 do manual escolar e para algumas tarefas realizadas nas aulas anteriores.<br>Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.<br><br>Tendo em conta a dimensão da ficha de trabalho, a professora selecionará as questões 1, 2.1, 2.4, 2.5, 3, 6 e 7 que os alunos deverão resolver em sala de aula, enquanto outras serão consideradas para trabalho autónomo dos alunos em casa.<br><br>Depois deste momento de trabalho autónomo, alguns alunos irão ao quadro apresentar a resolução de algumas questões que deverão explicar aos colegas, caso existam dúvidas. Se mesmo assim as dúvidas persistirem a aula será interrompida e a professora fará uma explicação para a turma. |
| (3) | Determinação da derivada da função módulo<br>A professora projetará um ficheiro dinâmico de GeoGebra onde está representada a função $x^2$ e as sucessivas retas tangentes ao gráfico da função nos pontos do seu domínio. Em seguida será mostrado um ficheiro onde a função derivada é construída a partir das sucessivas retas tangentes vistas anteriormente. A professora deverá enfatizar a relação entre o declive da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto e a derivada da função nesse ponto, reforçando assim, a interpretação geométrica de derivada de uma função.<br>Posteriormente, a professora projetará um ficheiro onde está representada a função $\|x\|$ e as sucessivas retas tangentes nos pontos do seu domínio. A professora deverá chamar a atenção para o facto de no ponto de abcissa $0$ não existir reta tangente ao gráfico da função. Com um ficheiro onde é construída a derivada da função a partir das sucessivas retas tangentes ao gráfico da função, a professora deverá explicar aos alunos que como não existe reta tangente ao gráfico no ponto $x = 0$ não existe derivada da função em $x = 0$. Em interação com os alunos, a professora deverá relembrar a expressão da função módulo por ramos e determinar a derivada de $f(x) = \|x\|$ justificando que esta não está definida para $x = 0$, ou seja, que este ponto não pertence ao domínio da função derivada. |

| | |
|---|---|
| | Os alunos deverão registar no seu caderno diário a função módulo (definida com e sem o sinal de módulo), a sua função derivada e a representação gráfica da última.<br><br>De modo a consolidar as aprendizagens realizadas, a professora, mais uma vez através de um ficheiro dinâmico de GeoGebra, mostrará outro exemplo de uma função com "pontos angulosos" onde, tal como anteriormente, serão construídas as sucessivas retas tangentes ao gráfico da função nos pontos do seu domínio. Será também projetado um ficheiro onde será construída a função derivada através das sucessivas retas tangentes.<br>Através da visualização destes ficheiros será explorada com os alunos a ideia intuitiva de pontos onde não existe derivada de uma função.<br><br>No final deste momento, tendo em conta que todas as funções derivadas contempladas no Programa de Matemática A do 11.º ano já foram apresentadas aos alunos, a professora entregará uma ficha resumo com as regras de derivação e alguns exemplos. |
| (4) | Resolução da questão 8 da ficha de trabalho nº 1 e apresentação dos resultados<br>Os alunos resolverão autonomamente a questão 8 da ficha de trabalho.<br>Antes de os alunos iniciarem a resolução, a professora deverá introduzir a definição de função diferenciável, relacionando com o que foi feito anteriormente na sistematização das aprendizagens.<br>Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades. Dado que esta é a primeira vez que os alunos contactam com funções sem derivada em determinados pontos e uma vez que não têm nenhum processo analítico para provar se determinado ponto tem ou não derivada, será expectável que mostrem algumas dificuldades nesta questão. Neste caso, a professora deverá questioná-los acerca do que acabou de ser mostrado e da explicação dada encaminhando-os para a ideia intuitiva de "pontos angulosos". Caso os alunos persistam com muitas dificuldades a professora deverá enfatizar o facto de as funções polinomiais admitirem derivada em todos os pontos do seu domínio, ao contrário de outras funções "menos regulares". No caso da questão 8.2, mesmo que os alunos já tenham conseguido determinar quais as funções diferenciáveis, poderão mostram dificuldades em determinar o valor da derivada no ponto de abcissa indicado. Neste caso, a professora deverá questionar os alunos acerca da relação entre a reta tangente ao gráfico de uma função num determinado ponto e a derivada nesse ponto, relembrando-lhes a interpretação geométrica de derivada.<br>Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.<br><br>Depois deste momento de trabalho autónomo, alguns alunos irão ao quadro apresentar a resolução da questão 8. que deverão explicar aos colegas. Além disso, no final da apresentação a professora deverá questionar a turma sobre eventuais dúvidas procurando assegurar-se que todos os alunos compreenderam a definição de função diferenciável e a existência ou não de derivada da função em determinados pontos. |
| (5) | Encerramento da aula<br>Os alunos serão informados do trabalho de casa. |

| **Comentário** |
|---|
| Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostos como extra todas as questões da ficha de trabalho nº 1 não resolvidas em aula e o exercício 66 da página 81 do manual escolar.<br>Os exercícios 65 e 66.1 da página 81 do manual escolar serão considerados trabalho de casa. |

NOME: ________________________________________ TURMA ______

**Derivada da Função Afim**

Se $f(x) = mx + b$ então $f'(x) = m$

Nota: A derivada da função constante é zero, ou seja, se $f(x) = c$ então $f'(x) = 0$

Exemplo:

- Se $f(x) = 2x + 3$ então $f'(x) = 2$.
- Se $f(x) = 4$ então $f'(x) = 0$

**Derivada da função polinomial de 2º grau**

Se $f(x) = ax^2 + bx + c$, então $f'(x) = 2ax + b$

Exemplo:

- Se $f(x) = 4x^2$ então $f'(x) = (2 \times 4)x = 8x$.
- Se $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$ então $f'(x) = (2 \times 3)x + 5 = 6x + 5$.

**Derivada da função polinomial de 3º grau**

Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, então $f'(x) = 3ax^2 + 2bx^2 + c$

Exemplo:

- Se $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 8$ então $f'(x) = (3 \times 2)x^2 + (2 \times 3)x^2 + 1$

**Derivada de funções racionais**

(i) Se $f(x) = \frac{b}{x}$ então $f'(x) = -\frac{b}{x^2}$

(ii) Se $f(x) = \frac{b}{x-c}$ então $f'(x) = -\frac{b}{(x-c)^2}$

(iii) Se $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ então $f'(x) = -\frac{b}{(x-c)^2}$

- Se $f(x) = \frac{3}{x}$ então $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$
- Se $f(x) = \frac{3}{x-2}$ então $f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}$
- Se $f(x) = 4 + \frac{3}{x-2}$ então $f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}$

**Derivada da função módulo**

Se $f(x) = |ax - b|$ então $f'(x) = \begin{cases} a \ se \ x > \frac{b}{a} \\ -a \ se \ x < \frac{b}{a} \end{cases}$

Em $x = \frac{b}{a}$ não existe derivada.

<u>Exemplo</u>:

- Se $f(x) = |x|$ então $f'(x) = \begin{cases} 1 \ se \ x > 0 \\ -1 \ se \ x < 0 \end{cases}$

  Em $x = 0$ não existe derivada

- Se $f(x) = |2x|$ então $f'(x) = \begin{cases} 2 \ se \ x > 0 \\ -2 \ se \ x < 0 \end{cases}$

  Em $x = 0$ não existe derivada

- Se $f(x) = |5x - 3|$ então $f'(x) = \begin{cases} 5 \ se \ x > \frac{3}{5} \\ -5 \ se \ x < \frac{3}{5} \end{cases}$

  Em $x = \frac{3}{5}$ não existe derivada.

## 1.8. Planificação da 8ª Aula e Ficha Síntese

Aula de 12 de março de 2015 – Plano de Aula

| | | |
|---|---|---|
| Matemática | Introdução ao Cálculo Diferencial I | Ano: 11º |

| Sumário |
|---|
| Sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos de uma função: tarefa de exploração. Resolução de exercícios do manual escolar. |

| Objetivos |
|---|
| Compreender a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função. |

| Recursos | | | |
|---|---|---|---|
| **Professor** | Manual escolar<br>Tarefa "Evolução das bactérias" (Anexo 2.5)<br>Projetor<br>Computador Portátil | **Aluno** | Manual escolar<br>Tarefa "Evolução das bactérias" (Anexo 2.5) |

| Principais Tópicos e conceitos envolvidos | Capacidades Transversais |
|---|---|
| Constatação por argumentos geométricos de que:<br>*i)* se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo;<br>*ii)* se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto. | Comunicação Matemática<br>Raciocínio Matemático |

| Metodologia de trabalho |
|---|
| Trabalho autónomo dos alunos, em pares, na resolução da tarefa de exploração "Evolução das bactérias". Discussão e sistematização dos resultados em grande grupo. Trabalho autónomo dos alunos na resolução de exercícios do manual escolar. |

| Momentos da aula | Tempo Previsto – Aula 90 minutos |
|---|---|
| (1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas. | 5min |
| (2) Resolução da tarefa "Evolução das bactérias" | 20min |
| (3) Apresentação e discussão dos resultados | 10min |
| (4) Sistematização das aprendizagens | 33min |
| (5) Resolução de exercícios do manual e apresentação dos resultados | 20min |
| (6) Encerramento da aula | 2min |

| Desenvolvimento da Aula |
|---|
| (1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos. |
| (2) Resolução da tarefa "Evolução das bactérias"<br>Os alunos resolverão autonomamente a Tarefa "Evolução das bactérias".<br><br>Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.<br>De uma forma geral os alunos poderão evidenciar dificuldades no preenchimento da tabela da questão 1 no que se refere ao sinal do declive da reta tangente em pontos de abcissas pertencentes ao intervalo. Neste caso, a professora deverá questioná-los acerca dos seus conhecimentos sobre declives de retas e caso seja necessário indicar-lhes que podem desenhar a reta em questão. Se mesmo assim os alunos continuarem com dúvidas no sinal do declive, a professora deverá relembrar-lhes de que forma se verifica o sinal do declive de uma determinada reta. Alguns alunos poderão também mostrar dificuldades em determinar o sinal da derivada sendo que, se tal ocorrer, a professora os questionará acerca da relação entre o declive da reta tangente em pontos de abcissas pertencentes ao intervalo e a derivada, relação esta que eles têm trabalhado ao longo das últimas aulas. Caso os alunos não consigam concluir esta relação, a professora deverá encaminhá-los para a página 63 do manual.<br>Na questão 2. os alunos poderão demonstrar dificuldades na determinação do valor da derivada nos pontos de abcissa indicados. Neste caso a professora deverá, mais uma vez, questioná-los acerca da relação entre a derivada num ponto e o declive da reta tangente ao gráfico da função nesse mesmo ponto. Se mesmo assim os alunos persistirem com dúvidas a professora deverá relembrar a interpretação geométrica de derivada. Caso os alunos, mesmo que não mostrem dificuldades na interpretação geométrica da derivada, tenham dúvidas em determinar a reta tangente aos pontos pretendidos, a professora deverá apoiá-los encaminhando-os para a reta pretendida.<br>Na questão 3., genericamente, não se esperam muitas dificuldades, no entanto, caso os alunos não se recordem das regras de derivação a professora deverá encaminhá-los para a ficha síntese entregue na aula anterior. Relativamente ao estudo analítico do sinal da função derivada, os |

alunos poderão ter dúvidas sobre o procedimento a adotar e neste caso a professora deverá questioná-los acerca de outros exercícios onde já estudaram (desde o 10º ano) o sinal de funções. Se mesmo assim os alunos não compreenderem que devem determinar os zeros da função derivada, a professora deverá remetê-los para este procedimento.

A questão 4., apesar de ser uma questão mais aberta, não deverá conter grandes dificuldades uma vez que os alunos já realizaram várias questões deste tipo ao longo da unidade de ensino. No entanto, caso os alunos revelem dificuldades em relacionar a monotonia da função com o sinal da derivada a professora deverá questioná-los sobre a tabela que preencheram na questão 1 e encaminhá-los para a visualização do gráfico.

Na última questão espera-se que os alunos concluam facilmente a relação pretendida uma vez que a representação gráfica do início da tarefa é bastante facilitadora. No entanto caso os alunos não relacionem o estudo analítico com a representação gráfica, a professora deverá encaminhá-los nesse sentido, questionando-os acerca dos extremos da função, dos zeros da derivada e da relação entre estes.

Se durante este momento a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.

(3) Apresentação e discussão dos resultados

Os alunos apresentarão no quadro as suas resoluções, que serão discutidas com a turma caso existam dúvidas ou resoluções diferentes.

No caso das questões 4. e 5. se existirem diferentes conjeturas que a professora considere que devem ser discutidas com toda a turma, os alunos em questão apresentarão as suas conjeturas, justificando-as perante os colegas que poderão colocar questões se sentirem essa necessidade.

O papel da professora será o de mediadora de aprendizagens e gestora das interações, proporcionando um papel central aos alunos. No entanto caso existam dúvidas generalizadas deverá intervir cuidando que toda a turma realize aprendizagens significativas. Além disso, no final da apresentação de cada questão deverá questionar a turma sobre eventuais dúvidas e, particularmente nas últimas questões, deverá assegurar-se que todos os alunos compreenderam a relação entre a monotonia da função e o sinal da derivada bem como entre os extremos da função e os zeros da derivada.

(4) Sistematização das aprendizagens

A professora fará uma sistematização dos conceitos abordados na tarefa anterior.

Em primeiro lugar, tendo em conta as conjeturas que os alunos fizeram na questão 4, a professora sistematizará a relação entre o sinal da derivada e a monotonia da função. Assim, em interação com os alunos, estabelecer-se-á a seguinte relação: se a derivada de uma função $f$ é positiva para um intervalo, então $f$ é estritamente crescente nesse intervalo; se a derivada é negativa para um intervalo, a função $f$ é estritamente decrescente nesse intervalo e, finalmente, se a derivada é zero para um intervalo então a função $f$ é constante nesse intervalo. Será projetado um quadro com estas informações que os alunos deverão registar e a professora deverá indicar-lhes que esta sistematização se encontra feita com exemplos na página 83 do manual escolar.

Seguidamente serão abordadas as conjeturas da questão 5 que relaciona os zeros da derivada e os extremos da função. Uma vez que esta relação é extremamente delicada e exige uma série de cuidados e restrições, a professora fará alguns exemplos de modo a proporcionar aos alunos aprendizagens tão significativas quanto possível. Assim, tendo em conta a relação estabelecida na tarefa anterior, é de esperar que os alunos afirmem que os zeros da derivada são os extremos da função. A professora deverá chamar-lhes a atenção para a veracidade desta afirmação no caso particular da função utilizada na tarefa mas ressalvar que nem sempre isso acontece. Deste

| | |
|---|---|
| | modo, a professora projetará a representação gráfica da função $\|x\|$, onde os alunos podem observar a existência de um mínimo para $x=0$. Em seguida, relembrando o que foi feito numa das aulas anteriores será projetada a derivada desta função para que os alunos compreendam que $x=0$ não é zero da derivada e que, em particular, a função derivada não está definida nesse ponto. A professora deverá enfatizar a ideia de que, apesar de não ser um zero da derivada, em $x=0$, a função muda de sinal, existindo portanto um extremo, em $x=0$, para a função $\|x\|$.<br>Após este exemplo, a professora projetará a representação gráfica da função $x^3$ e, em interação com os alunos, determinará a sua derivada. A representação gráfica da mesma será também projetada de modo a que os alunos possam estudar o seu sinal. Assim, a professora deverá chamar-lhes a atenção para o facto de a derivada ter um zero duplo (para $x=0$) e, no entanto, não mudar de sinal. Relacionando com a função $x^3$, através da representação gráfica, a professora encaminhará os alunos para o facto de, apesar de $x=0$ ser zero da função derivada, a função $x^3$ não ter nenhum extremo para $x=0$. Em interação com os alunos, a professora deverá concluir então que se uma função $f$ é contínua para $x=a$ e a sua derivada muda de sinal no ponto de abcissa $a$, então a função $f$ tem um extremo em $x=a$. Será projetado um quadro com estas informações que os alunos deverão registar no seu caderno e a professora entregará uma ficha síntese onde constarão os exemplos dados e os quadro resumo.<br><br>Ao longo de todo este momento, caso os alunos evidenciem dúvidas deverão questionar a professora que fará uma explicação para a turma. |
| (5) | Resolução de exercícios do manual e apresentação dos resultados<br>Os alunos resolverão autonomamente os exercícios 68, 69 e 73, respetivamente das páginas 83, 84 e 86 do manual escolar.<br>Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades. De uma forma geral os exercícios não deverão suscitar grandes dificuldades. No entanto, dado que será a primeira vez que os alunos aplicam diretamente a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função, estes poderão evidenciar algumas dificuldades, sendo que a professora deverá apoiá-los questionando-os acerca do que foi feito na tarefa anterior e na sistematização das aprendizagens. Caso as dificuldades permaneçam, a professora deverá relembrar-lhes a relação anteriormente abordada.<br><br>Depois deste momento de trabalho autónomo, alguns alunos irão ao quadro apresentar as suas resoluções que deverão explicar aos colegas, caso existam dúvidas. Se mesmo assim as dúvidas persistirem a aula será interrompida e a professora fará uma explicação para a turma. |
| (6) | Encerramento da aula<br>Os alunos serão informados sobre o trabalho de casa. |

| **Comentário** |
|---|
| Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostas como extra:<br>- Proposta 15 da página 139<br>- Proposta 16 da página 139<br>Caso nem todos os exercícios propostos para a aula sejam realizados, serão considerados trabalho de casa. |

NOME: ______________________________ TURMA _____

**Sinal da derivada e sentido de variação**

Seja $f$ uma função real de variável real e $]a,b[$ um intervalo contido no domínio de $f$. Sabe-se que:

- Se $f'(x) > 0, \forall x \in ]a,b[$, então $f$ é estritamente crescente em $]a,b[$
- Se $f'(x) < 0, \forall x \in ]a,b[$, então $f$ é estritamente decrescente em $]a,b[$
- Se $f'(x) = 0, \forall x \in ]a,b[$, então $f$ é constante em $]a,b[$

**Extremos relativos de uma função**

Dada uma função, o estudo do sinal da derivada dessa função permite identificar, caso existam, os seus extremos relativos (máximos e mínimos).

**Exemplo 1:**

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$$

Façamos o estudo do sinal da derivada da função $f$:

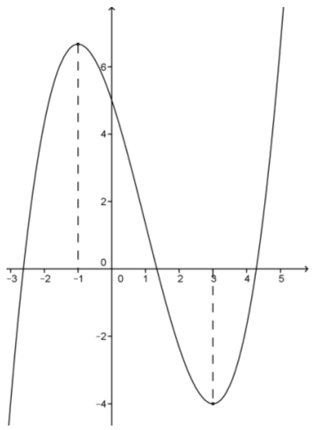
- Determinamos a derivada de $f$: $f'(x) = x^2 - 2x - 3$
- Calculamos os zeros da derivada: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$
- Preenchemos o quadro de sinal:

| $\boldsymbol{x}$ | $-\infty$ | $-1$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{f'}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\boldsymbol{f}$ | ↗ | $\frac{20}{3}$ | ↘ | $-4$ | ↗ |

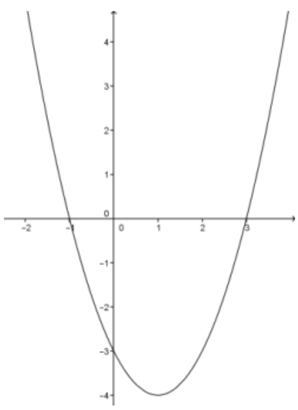
O estudo do sinal da derivada mostra que:

- $f$ é estritamente crescente em $]-\infty,-1[$ e em $]3,+\infty[$ dado que a derivada é positiva nesses intervalos;
- $f$ é estritamente decrescente em $]-1,3[$ dado que a derivada é negativa nesse intervalo;
- $f$ tem um máximo relativo para $x=-1$ dado que a derivada passa de positiva a negativa e anula-se nesse ponto;
- $f$ tem um mínimo relativo para $x=3$ dado que a derivada passa de negativa a positiva e anula-se nesse ponto;

Estas características da função e da sua derivada podem ser observadas nas respetivas representações gráficas.




Representação gráfica de *f*




Representação gráfica de *f'*

Em síntese:

- $f'(-1)=0$ e $f'(3)=0$
- Em $x=-1$, a derivada passa de positiva a negativa: $f(-1)$ é máximo relativo de $f$
- Em $x=3$, a derivada passa de negativa a positiva: $f(3)$ é mínimo relativo de $f$

**Exemplo 2:**

$$g(x)=|x|$$

Podemos escrever a função $g$ da seguinte forma:

$$g(x) = \begin{cases} -x \; se \; x < 0 \\ 0 \; se \; x = 0 \\ x \; se \; x > 0 \end{cases}$$

Façamos o estudo do sinal da derivada da função $g$:

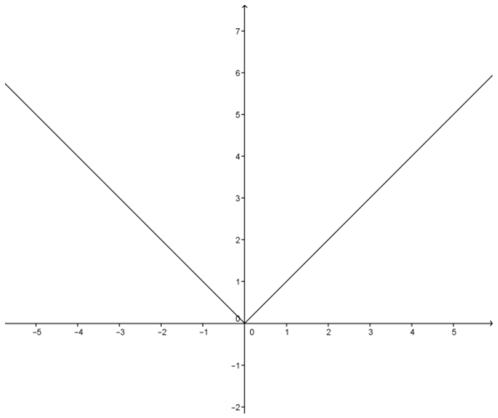
- Determinamos a derivada de $g$: $g'(x) = \begin{cases} -1 \; se \; x < 0 \\ 1 \; se \; x > 0 \end{cases}$
- Como podemos observar, a função derivada de $g$ não tem zeros, no entanto muda de sinal
- Preenchemos o quadro de sinal:

| $\boldsymbol{x}$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{g'}$ | $-$ | $n.d.$ | $+$ |
| $\boldsymbol{g}$ | ↘ | $0$ | ↗ |

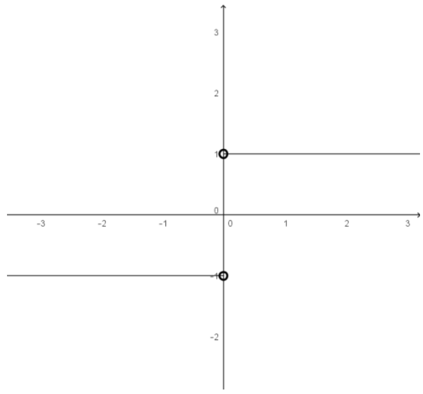
O estudo do sinal da derivada mostra que:

- $g$ é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ dado que a derivada é negativa nesse intervalo;
- $g$ é estritamente crescente em $]0, +\infty[$ dado que a derivada é positiva nesse intervalo;
- $g$ tem um mínimo relativo para $x = 0$ dado que a derivada passa de negativa a positiva (apesar de não estar definida nesse ponto).

Estas características da função e da sua derivada podem ser observadas nas respetivas representações gráficas.



Representação gráfica de $g$



Representação gráfica de $g'$

Em síntese:

- Em $x = 0$ não existe derivada
- Em $x = 0$, a derivada passa de negativa a positiva
- $g(0)$ é mínimo relativo da função

⚠ A função $g'$ não tem zeros, no entanto muda de sinal em $x = 0$, logo a função $g$ tem um extremo relativo para $x = 0$

**Exemplo 3:**

$$h(x) = x^3$$

Façamos o estudo do sinal da derivada da função $h$:

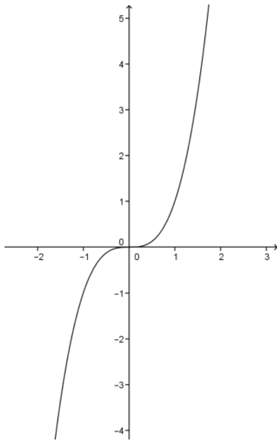
- Determinamos a derivada de $h$: $h'(x) = 3x^2$
- Calculamos os zeros da derivada: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Preenchemos o quadro de sinal:

| $\boldsymbol{x}$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{h'}$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $\boldsymbol{h}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

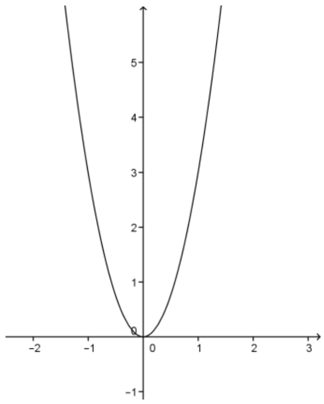
O estudo do sinal da derivada mostra que:

- $h$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ dado que a derivada é sempre positiva.
- $h$ não tem máximos nem mínimos dado que a derivada nunca muda de sinal.

Estas características da função e da sua derivada podem ser observadas nas respetivas representações gráficas.



Representação gráfica de $h$



Representação gráfica de $h'$

Em síntese:

- $h'(0) = 0$
- Em $x = 0$, a derivada não muda de sinal (é sempre positiva)
- $h$ não tem máximo nem mínimo

Apesar de $h'$ ter um zero não muda de sinal, e portanto a função $h$ não tem extremos.

## Resumindo:

Seja $f$ uma função real de variável real de domínio $D$ e $a \in D$.

Se $f$ é contínua em $x = a$ e a função derivada muda de sinal, então $f(a)$ é um extremo de $f$.

- $f(a)$ é **máximo relativo**, se a função derivada passa de positiva a negativa;
- $f(a)$ é **mínimo relativo**, se a função derivada passa de negativa a positiva.

## 1.9. Planificação da 9ª Aula

Aula de 13 de março de 2015 – Plano de Aula

| | | |
|---|---|---|
| Matemática | Introdução ao Cálculo Diferencial I | Ano: 11º |

| **Sumário** |
|---|
| Resolução de tarefas sobre a relação entre o sinal da função derivada e sentido de variação e extemos relativos de uma função. |

| **Objetivos** |
|---|
| Consolidar a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função. |

| **Recursos** | | | |
|---|---|---|---|
| **Professor** | Ficha de trabalho nº 2 (Anexo 2.6)<br>Manual escolar<br>Projetor<br>Computador Portátil | **Aluno** | Ficha de trabalho nº 2 (Anexo 2.6)<br>Manual escolar<br>Calculadora gráfica |

| **Principais Tópicos e conceitos envolvidos** | **Capacidades Transversais** |
|---|---|
| Constatação por argumentos geométricos de que:<br>*i)* se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo;<br>*ii)* se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto. | Comunicação Matemática<br>Raciocínio Matemático<br>Resolução de Problemas |

| **Metodologia de trabalho** |
|---|
| Trabalho autónomo dos alunos, individualmente ou em pares, na resolução das tarefas.<br>Discussão dos resultados em grande grupo. |

| **Momentos da aula** | **Tempo Previsto – Aula 90 minutos** |
|---|---|
| (1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas. | 5min |
| (2) Correção do trabalho de casa | 30min |
| (3) Resolução das questões 1.(b) e 1.(c), 3, 4 e 5 da ficha de trabalho nº 2 | 53min |
| (4) Encerramento da aula | 2min |

| **Desenvolvimento da Aula** |
|---|
| (1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos. |
| (2) Correção do trabalho de casa<br>Neste momento serão apresentadas as resoluções dos exercícios 69.2, 69.3 e 73, respetivamente, das páginas 84 e 86 do manual escolar.<br>Cada alínea será apresentada por um aluno, que deverá indicar todos os cálculos e justificações bem como explicar a sua resolução à turma. Tendo em conta que estes exercícios são as primeiras aplicações da relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos de uma função, a professora deverá enfatizar a importância da mesma e os procedimentos envolvidos, fazendo uma síntese após cada resolução. Caso, ao longo deste momento, a professora se aperceba de dúvidas generalizadas na compreensão da relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos de uma função deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma, relembrando o que foi feito na aula anterior.<br>Após a apresentação das resoluções a professora deverá também recordar aos alunos que poderão consultar a ficha síntese entregue na aula anterior onde é feito um resumo alargado e com exemplos da relação estudada.<br>Neste momento existirá também lugar para que os alunos tirem dúvidas relativamente a exercícios considerados trabalho de casa nas aulas anteriores, nomeadamente os exercícios 65 e 66 da página 81. Caso existam dúvidas generalizadas em algum dos conteúdos abordados nas últimas aulas, estas serão também esclarecidas neste momento. |
| (3) Resolução das questões 1.(b) e 1.(c), 3, 4 e 5 da ficha de trabalho nº 2<br>Os alunos resolverão autonomamente algumas tarefas de uma ficha de trabalho que será entregue neste momento. Tendo em conta o tempo disponível, a professora indicará aos alunos quais as tarefas da ficha que deverão resolver. Neste caso, as tarefas a resolver neste momento serão 1.(b) e 1.(c), 3, 4 e 5 da ficha de trabalho.<br>Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.<br>Na primeira questão, de uma forma geral, os alunos poderão evidenciar dificuldades nos procedimentos a realizar para estudar os intervalos de monotonia e os extremos de uma função. |

Neste caso, a professora deverá questioná-los acerca dos seus conhecimentos sobre a relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos de uma função, recordando o que foi feito durante a correção do trabalho de casa e na aula anterior. Caso as dúvidas persistam a professora deverá encaminhar os alunos para a ficha síntese entregue na aula anterior, e/ou, se necessário, fazer uma breve explicação sobre a relação pretendida e os procedimentos envolvidos.
Relativamente às funções da questão, na 1.(b) é expectável que os alunos demonstrem dificuldades, uma vez que, além de a função derivada ter uma restrição no domínio, não terá zeros. Assim, espera-se que os alunos tenham dúvidas na construção do quadro de sinais e na própria relação entre a derivada e a função. Neste caso, a professora deverá recordar a resolução do exercício 73.2 (corrigido anteriormente) ao mesmo tempo que deverá questionar os alunos sobre a conclusão que se pode estabelecer pelo facto de a derivada ser sempre negativa.
Na questão 1.(c) os alunos poderão demonstrar dificuldades na determinação da função derivada no que diz respeito ao seu domínio. Além disso como a derivada não tem zeros, estes poderão não conseguir estabelecer a relação entre os extremos da função e a mudança de sinal da função derivada. A professora deverá recordar o exercício 66 do manual e o exemplo da função módulo abordado na ficha síntese entregue na aula anterior.

Na questão 3. os alunos poderão revelar algumas dificuldades no que se refere à relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação de uma função, nomeadamente na sua representação gráfica. Neste caso, a professora deverá questionar os alunos acerca do sinal da função derivada em cada uma das figuras e a forma como este está ou não relacionado com a variação da função. Se os alunos continuarem com dúvidas a professora deverá encaminhá-los para a relação estudada na aula anterior. Além disso, os alunos poderão excluir facilmente a alínea (D) relembrando as regras de derivação, dado que a derivada de uma função afim é uma função constante, o que não acontece no caso desta figura.

Na questão 4, uma vez que se trata de um problema de otimização é expectável que os alunos demonstrem dificuldades dado que é a primeira vez que contactam com um problema de otimização. Deste modo, é de esperar que os alunos mostrem algumas dúvidas no início do problema, não sabendo como o resolver. Neste caso, a professora deverá estimular os alunos na resolução do problema remetendo para o contexto apresentado. Poderá também questioná-los sobre as várias formas que conhecem para determinar o valor máximo de uma função.
Caso os alunos recorram ao estudo do sinal e dos zeros da função derivada para resolver o problema, poderão manifestar dificuldades na construção do quadro de sinais tendo em conta o contexto do problema. Neste caso a professora deverá questioná-los sobre o domínio da função derivada. No final do problema a professora deverá relembrar-lhes o objetivo do mesmo, questionando-os sobre a resposta dada, sensibilizando-os para a necessidade de responderem à questão colocada de forma contextualizada. Se os alunos recorrerem à calculadora gráfica, a professora deverá dizer-lhes que devem reproduzir na sua folha o gráfico da função e os comandos que utilizaram na resolução.

Na questão 5. os alunos poderão demonstrar algumas dificuldades em relacionar a derivada de uma função e a própria. Assim, nas questões 5.(a) e (c), uma vez que são pedidas informações sobre a função derivada a partir da função original, espera-se que os alunos possam sentir algumas dúvidas em estabelecer a relação inversa, dado que até ao momento só estudaram a função original a partir da função derivada e não o contrário. A professora deverá questioná-los sobre os conhecimentos que têm relativamente à relação entre o sinal da função derivada e sentido de variação de uma função e encaminhá-los para a ficha síntese entregue na aula anterior. Na questão 5.(b) os alunos poderão evidenciar dificuldades no reconhecimento dos pontos onde não existe derivada. Neste caso, a professora deverá relembrar o que foi estudado anteriormente, na aula onde foram abordados os pontos angulosos. Caso os alunos não fiquem esclarecidos, a professora fará uma breve explicação sobre os pontos de uma função onde não existe derivada e poderá encaminhá-los para alguns exemplos, nomeadamente os da página 81 do manual escolar.

Se durante a resolução das várias tarefas a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.

Durante o trabalho autónomo dos alunos, existirão momentos de apresentação/discussão de resultados.
No caso das questões 1, 3 e 5 cada alínea será apresentada por um aluno que deverá indicar todos os cálculos e justificações bem como explicar aos colegas a sua resolução. A professora, caso existam dúvidas, deverá fazer uma explicação para a turma.
Na questão 4 da ficha de trabalho caso existam várias estratégias de resolução para o problema de otimização poderão ser apresentadas várias resoluções representativas destas mesmas estratégias. Os alunos que apresentarem as suas resoluções deverão explicar aos colegas o seu raciocínio e apresentar todas as justificações necessárias. No final da apresentação do problema, a professora deverá discutir com a turma a eficácia das várias estratégias e fazer uma explicação para a turma, no caso de existirem dúvidas.

(4) Encerramento da aula

Os alunos serão informados do trabalho de casa.

**Comentário**

Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostos como extra:

- Proposta 8 da página 132
- Exercício 70 da página 84

Caso alguma questão da ficha não seja realizada em aula, será considerada trabalho de casa.

## 1.10. Planificação da 10ª Aula

Aula de 17 de março de 2015 – Plano de Aula

| | | |
|---|---|---|
| Matemática | Introdução ao Cálculo Diferencial I | Ano: 11º |

| Sumário |
|---|
| Correção e discussão dos resultados da ficha de trabalho iniciada na aula anterior. Resolução de tarefas do manual escolar. |

| Objetivos |
|---|
| Consolidar a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função. |

| Recursos | | | |
|---|---|---|---|
| **Professor** | Ficha de trabalho nº 2 (Anexo 2.6)<br>Manual escolar<br>Projetor<br>Computador Portátil | **Aluno** | Ficha de trabalho nº 2 (Anexo 2.6)<br>Manual escolar<br>Calculadora gráfica |

| Principais Tópicos e conceitos envolvidos | Capacidades Transversais |
|---|---|
| Constatação por argumentos geométricos de que:<br>*i)* se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo;<br>*ii)* se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto. | Comunicação Matemática<br>Raciocínio Matemático<br>Resolução de Problemas |

| Metodologia de trabalho |
|---|
| Trabalho autónomo dos alunos, individualmente ou em pares, na resolução das tarefas. Discussão dos resultados em grande grupo. |

| Momentos da aula | Tempo Previsto – Aula 90 minutos |
|---|---|
| (1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas. | 5min |
| (2) Apresentação e discussão dos resultados das questões 1.(b), 1(c), 3. e 4. da ficha de trabalho nº 2 | 45min |
| (3) Resolução da questão 5. da ficha de trabalho nº 2, apresentação e discussão dos resultados | 22min |
| (4) Resolução da proposta 3 da página 136 do manual escolar, apresentação e discussão dos resultados | 16min |
| (5) Encerramento da aula | 2min |

| Desenvolvimento da Aula |
|---|
| (1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos. |
| (2) Apresentação e discussão dos resultados das questões 1.(b), 1(c), 3. e 4. da ficha de trabalho nº 2<br>Neste momento alguns alunos irão apresentar ao quadro as suas resoluções das questões 1.(b) e 1.(c). Os alunos que apresentarem as suas resoluções deverão explicar aos colegas o seu raciocínio e apresentar todas as justificações necessárias. Como estas duas questões envolvem particularidades ainda pouco estudadas da relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos de uma função, a professora deverá, depois de cada apresentação explicar para toda turma, na primeira alínea, que mesmo que a função derivada não tenha zeros podemos estudar o seu sinal e tirar conclusões válidas para a função original, e na segunda alínea, que mesmo não exista derivada num determinado ponto, a mudança de sinal da mesma, irá implicar um extremo na função original. A professora deverá ainda alertar aos alunos que poderão estudar o sinal de funções usando uma inequação, pois na impossibilidade de usarem calculadora gráfica este é um método analítico para o fazerem. Além disso, a professora deverá enfatizar, que o processo utilizado nestas questões é sempre o mesmo, mas que existem funções que têm particularidades que merecem algum cuidado quando estão a ser estudadas pelo que não deverão utilizar o método apenas como “receita”.<br><br>Como a questão 3. da ficha de trabalho envolve a análise de gráficos, serão projetados no quadro esses mesmos gráficos e um aluno terá que apresentar a sua resolução através do que está projetado no quadro, justificando a opção correta e também explicando o porquê da exclusão das outras três opções. A professora, neste momento deverá ter em atenção se a turma está a compreender o que está a ser explicado, podendo intervir colocando questões aos alunos sobre os seus conhecimentos acerca da relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos de uma função. Além disso, a professora deverá enfatizar que a relação entre a função derivada e a função original pode ser estudada graficamente e que as conclusões que se podem retirar desse estudo são igualmente válidas, desde que bem justificadas. |

Na questão 4. caso existam várias estratégias de resolução para o problema de otimização poderão ser apresentadas várias resoluções representativas destas mesmas estratégias. Os alunos que apresentarem as suas resoluções deverão explicar aos colegas o seu raciocínio e apresentar todas as justificações necessárias. No final das apresentação do problema, a professora deverá discutir com a turma a eficácia das várias estratégias e fazer uma explicação para a turma, no caso de existirem dúvidas. Além disso a professora enfatizará a importância de dar uma resposta completa e contextualizada ao problema, tendo sempre em atenção o que é pedido no enunciado. Assim, depois de apresentada a resolução deste problema a professora deverá explicar aos alunos, que embora existam vários métodos para resolver um problema de otimização, o estudo do sinal da derivada da função que se pretenda otimizar constituiu um método analítico eficaz para o resolver.

(3) Resolução da questão 5. da ficha de trabalho nº 2, apresentação e discussão dos resultados

Neste momento os alunos terão oportunidade de concluir a ficha iniciada na aula anterior, particularmente a questão 5.

Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.

Nesta questão é expectável que surjam dificuldades em relacionar a derivada de uma função com a função original, pois é a primeira vez que os alunos a partir da função original tiram conclusões para a função derivada, ou seja, em estabelecer a relação inversa, dado que até ao momento só estudaram a função original a partir da função derivada. Estas dificuldades poderão surgir nas questões 5.(a) e 5.(c), pelo que a professora deverá questioná-los sobre os conhecimentos que têm relativamente à relação entre o sinal da função derivada e sentido de variação de uma função e encaminhá-los para a ficha síntese entregue numa aula anterior.

Na questão 5.(b) os alunos poderão evidenciar dificuldades no reconhecimento dos pontos onde não existe derivada. Neste caso, a professora deverá relembrar o que foi estudado anteriormente, na aula onde foram abordados os pontos angulosos. Caso os alunos não fiquem esclarecidos, a professora fará uma breve explicação sobre os pontos de uma função onde não existe derivada e poderá encaminhá-los para alguns exemplos, nomeadamente os da página 81 do manual escolar.

Se durante a resolução desta questão a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma.

Após o trabalho autónomo alguns alunos irão ao quadro apresentar as suas resoluções. Os alunos que apresentarem as suas resoluções deverão explicar aos colegas o seu raciocínio e apresentar todas as justificações necessárias. Neste momento, a professora, caso considere necessário, poderá intervir com questões à turma, de modo a que todos compreendam o que está a ser estudado em cada alínea. Nesta questão, nomeadamente, nas alíneas 5.(a) e 5.(c) a professora deverá, mais uma vez, alertar os alunos para o facto de a relação entre a função derivada e a função original também poder ser estabelecida através das suas representações gráficas e as conclusões retiradas dessa análise serem também válidas. Na questão 5.(b) a professora deverá ter atenção se todos os alunos compreenderam em que pontos não existe derivada, e caso ainda existam dúvidas fazer uma explicação para a turma, relembrando-lhes, por exemplo, a função módulo estudada anteriormente.

(4) Resolução da proposta 3 da página 136 do manual escolar, apresentação e discussão dos resultados

Os alunos resolverão autonomamente a proposta 3 da página 136 do manual escolar.

| | |
|---|---|
| | Antes de os alunos iniciarem a resolução da proposta 3, a professora deverá fazer uma breve explicação sobre a relação entre a velocidade média e a derivada de uma função que expressa o espaço ou a distância percorrida em função do tempo decorrido. Assim, a professora deverá referir aos alunos que ao fazerem a taxa média de variação para um certo intervalo de uma função que expressa a distância percorrida por um certo objeto em função do tempo, obtêm a velocidade média do objeto nesse intervalo. Em seguida a professora explicará aos alunos que ao calcularem a taxa de variação/derivada de uma função deste tipo num determinado instante obtêm a velocidade instantânea.<br>Após esta breve explicação os alunos não deverão manifestar muitas dificuldades nas questões 1 e 2, no entanto, caso algum aluno não tenha compreendido a explicação feita para a turma a professora deverá dar-lhe outros exemplos, de modo a que este perceba a relação entre a derivada de uma função e a velocidade.<br>No caso da questão 3 os alunos poderão revelar algumas dúvidas relativas ao próprio enunciado, pelo que a professora deverá questioná-los sobre as informações fornecidas no mesmo. Assim, uma vez que é pedido o instante para o qual a velocidade toma determinado valor, a professora deverá interpelar os alunos sobre o significado da velocidade instantânea e a sua relação com a derivada de uma função. Como é a primeira vez que os alunos têm de igualar a função derivada a determinado valor, resolvendo uma equação, é natural que mostrem algumas dificuldades. Neste caso a professora deverá relembrar-lhes que a derivada é uma função e que portanto devem atuar da mesma forma que nas situações onde têm de resolver equações.<br><br>Após este momento de trabalho autónomo a questão será apresentada e discutida, sendo que um aluno irá ao quadro apresentar as suas resoluções à turma, justificando todos os cálculos e explicando o seu raciocínio aos colegas. |
| (5) | Encerramento da aula<br>Os alunos serão informados do trabalho de casa. |

| **Comentário** |
|---|
| Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostos como extra:<br>- Questão 2 da ficha de trabalho<br>- Proposta 25 da página 142 do manual escolar<br>Caso estas propostas extra não sejam realizadas em aula serão consideradas trabalho de casa. |

## 1.11. Planificação da 11ª Aula

Aula de 19 de março de 2015 – Plano de Aula

| | | |
|---|---|---|
| Matemática | Introdução ao Cálculo Diferencial I | Ano: 11º |

| **Sumário** |
|---|
| Resolução de uma ficha de trabalho sobre a relação entre uma função e a sua derivada. Correção e discussão dos resultados da ficha de trabalho. Entrega das fichas de avaliação. Autoavaliação. |

| **Objetivos** |
|---|
| Consolidar a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função. |

| **Recursos** | | | |
|---|---|---|---|
| **Professor** | Ficha de trabalho º 3 (Anexo 2.7)<br>Manual escolar<br>Projetor<br>Computador Portátil | **Aluno** | Ficha de trabalho nº 3 (Anexo 2.7)<br>Manual escolar<br>Calculadora gráfica |

| **Principais Tópicos e conceitos envolvidos** | **Capacidades Transversais** |
|---|---|
| Constatação por argumentos geométricos de que:<br>*i)* se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo;<br>*ii)* se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto. | Comunicação Matemática<br>Raciocínio Matemático<br>Resolução de Problemas |

| Metodologia de trabalho |
|---|
| Trabalho autónomo dos alunos, individualmente ou em pares, na resolução das tarefas.<br>Discussão dos resultados em grande grupo. |

| Momentos da aula | Tempo Previsto – Aula 90 minutos |
|---|---|
| (1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas. | 5min |
| (2) Resolução das questões 2., 4. e 5. da ficha de trabalho nº 3 | 33min |
| (3) Apresentação e discussão das questões 2.,4. e 5. da ficha de trabalho nº 3 | 20min |
| (4) Entrega das fichas de avaliação. Autoavaliação. | 30min |
| (5) Encerramento da aula | 2min |

| Desenvolvimento da Aula |
|---|
| (1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos. |
| (2) Resolução das questões 2., 4. e 5. da ficha de trabalho nº 3<br>Neste momento os alunos resolverão autonomamente as questões 2., 4. e 5. da ficha de trabalho.<br>Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.<br><br>Na questão 2. os alunos poderão mostrar dificuldades no reconhecimento da função e da sua derivada, pois estas estão representadas graficamente, não havendo expressões algébricas que as definam. Como esta questão poderá ser resolvida de várias formas a professora, consoante as dúvidas e questões dos alunos pode atuar de formas distintas. Se os alunos referirem a relação entre o sinal da função derivada e a variação da função, a professora deverá questioná-los acerca dos seus conhecimentos sobre esta relação e como os podem usar para relacionar as duas funções. Se os alunos não referirem esta relação a professora poderá questioná-los acerca das funções que têm representadas, nomeadamente de que tipo são e que grau podem ter e de que forma podem relacionar estas informações para determinarem a relação entre uma função e a sua função derivada. Se as dificuldades persistirem a professora poderá também mostrar um exemplo da função quadrática $x^2$ e da sua função derivada $2x$, pedindo aos alunos que as representem graficamente e que tirem conclusões acerca das representações gráficas e o grau das expressões, questionando-os sobre a relação que se pode estabelecer entre o grau de uma função polinomial e o da sua função derivada.<br><br>Na questão 4., os alunos poderão evidenciar dificuldades pois é a primeira vez que estes terão de construir um quadro de sinal da função derivada, a partir de um quadro de variação da função original. Além disso, os alunos poderão também mostrar dificuldades no esboço da representação gráfica da função, pois nunca o fizeram a partir de um quadro de variação da função e tendo em conta o quadro de sinal construído anteriormente. No caso de os alunos |

| | |
|---|---|
| | evidenciarem dificuldades na análise do quadro de variação e na construção do quadro de sinal, a professora deverá questionar os alunos acerca da informação contida no quadro de variação e como esta está relacionada com o sinal da função derivada.<br><br>Na questão 5. os alunos poderão evidenciar dificuldades na determinação do domínio da função derivada. Neste caso a professora deverá relembrar aos alunos a ideia de pontos angulosos e questioná-los sobre a existência ou não de derivada nestes pontos. A professora, de modo a ajudar os alunos a ultrapassar a suas dificuldades, poderá também encaminhá-los para a ficha síntese entregue numa aula anterior onde está explorado o caso da função módulo, que lhes mostra que podem existir pontos em que não existe derivada.<br><br>Se durante a resolução destas questões a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma. |
| (3) | Apresentação e discussão das questões 2., 4. e 5. da ficha de trabalho nº 3<br>Neste momento alguns alunos irão ao quadro apresentar as suas resoluções das questões 2., 4. e 5. da ficha de trabalho. Os alunos que apresentarem as suas resoluções deverão explicar aos colegas o seu raciocínio e apresentar todas as justificações necessárias. Se existirem resoluções distintas que mereçam ser discutidas, a professora deverá nessas questões pedir a diferentes alunos que mostrem as suas resoluções.<br>Como algumas das questões apresentam algumas particularidades que merecem algum cuidado, a professora deverá, após a apresentação das suas resoluções fazer uma explicação para toda a turma. No caso da questão 2. a professora deverá enfatizar o facto de nas funções polinomiais o grau da função derivada ser menor, em uma unidade, o grau da função original. Na questão 4. a professora deverá relembrar aos alunos que a relação que se estabelece entre o sinal da função derivada e o sentido de variação de uma função pode ser feita no sentido "derivada-função" bem como no sentido "função-derivada". No caso da questão 5. a professora deverá reforçar a terminologia a adotar neste tipo de questão que é "pontos angulosos", já que os alunos não têm métodos analíticos para justificarem a não existência de derivada em determinados pontos do domínio da função original.<br><br>Após cada questão corrigida e discutida a professora deverá questionar aos alunos se estes têm dúvidas e em caso afirmativo, fazer uma explicação para toda a turma. |
| (4) | Entrega das fichas de avaliação. Autoavaliação.<br>Os alunos receberão as fichas de avaliação e serão esclarecidas qualquer dúvida relativa à mesma. De seguida os alunos farão a sua autoavaliação, tendo em conta o que desenvolveram ao longo do 2.º período. |
| (5) | Encerramento da aula<br>Os alunos serão informados do trabalho de casa. |

| **Comentário** |
|---|
| Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostos como extra:<br>- Questão 6. da ficha de trabalho. |

## 1.12. Planificação da 12ª Aula

Aula de 20 de março de 2015 – Plano de Aula

| | | |
|---|---|---|
| Matemática | Introdução ao Cálculo Diferencial I | Ano: 11º |

| **Sumário** |
|---|
| Conclusão da ficha de trabalho iniciada na aula anterior. Resolução de problemas de otimização. |

| **Objetivos** |
|---|
| Consolidar a relação entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e extremos relativos de uma função. |

| **Recursos** | | | |
|---|---|---|---|
| **Professor** | Ficha de trabalho nº 3 (Anexo 2.7)<br>Ficha de trabalho nº 4 (Anexo 2.8)<br>Manual escolar<br>Projetor<br>Computador Portátil | **Aluno** | Ficha de trabalho nº 3 (Anexo 2.7)<br>Ficha de trabalho nº 4 (Anexo 2.8)<br>Manual escolar<br>Calculadora gráfica |

| **Principais Tópicos e conceitos envolvidos** | **Capacidades Transversais** |
|---|---|
| Constatação por argumentos geométricos de que:<br>*i)* se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo;<br>*ii)* se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto. | Comunicação Matemática<br>Raciocínio Matemático<br>Resolução de Problemas |

| Metodologia de trabalho |
|---|
| Trabalho autónomo dos alunos, individualmente ou em pares, na resolução das tarefas.<br>Discussão dos resultados em grande grupo. |

| Momentos da aula | Tempo Previsto – Aula 90 minutos |
|---|---|
| (1) Entrada dos alunos. Ditado do sumário. Registo das faltas. | 5min |
| (2) Resolução das questões 1. e 3. da ficha de trabalho nº 3 | 20min |
| (3) Apresentação e discussão das questões 1. e 3. da ficha de trabalho nº 3 | 15min |
| (4) Resolução das questões 1. e 3. da ficha de trabalho nº 4, apresentação e discussão dos resultados | 48min |
| (5) Encerramento da aula | 2min |

| Desenvolvimento da Aula |
|---|
| (1) Ditado do sumário e registo das presenças dos alunos. |
| (2) Resolução das questões 1. e 3. da ficha de trabalho nº 3<br>Neste momento os alunos resolverão autonomamente as questões 1. e 3. da ficha de trabalho. Ao longo de todo este momento a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.<br><br>Na questão 1. os alunos poderão evidenciar dificuldades pois é a primeira vez que têm de determinar a expressão algébrica de uma função a partir da expressão algébrica da sua função derivada. É expectável que os alunos tenham dificuldade em iniciar a tarefa, pois poderão não estar recordados da forma canónica de uma função quadrática, $ax^2 + bx + c$. Neste caso, a professora deverá questioná-los sobre a forma de expressar uma função quadrática, pedindo-lhes exemplos de funções quadráticas que conheçam e questionando-os sobre o facto das funções que estes se recordam serem completas ou incompletas. Além disso, os alunos poderão revelar dificuldades da determinação dos parâmetros $a$ e $b$, pois apesar de estes conhecerem e saberem aplicar as regras de derivação, terão de aplicá-las no sentido inverso. Se estas dificuldades surgirem, a professora deverá questionar os alunos sobre as regras de derivação que conhecem, mostrando outros exemplos para que os alunos se apercebam da relação entre os parâmetros em questão, o grau da função e os coeficientes presentes na função derivada. Ainda poderão surgir dificuldades nesta questão na determinação do parâmetro $c$. Neste caso a professora deverá encaminhar os alunos para uma nova leitura do enunciado e questioná-los sobre a informação presente no mesmo que estes ainda não usaram e como podem usá-la para descobrir o parâmetro em falta.<br><br>Na questão 3. os alunos terão de tirar conclusões para uma função através da sua derivada. As dificuldades poderão estar relacionadas com o facto desta derivada estar representada graficamente. Na questão 3.(a) os alunos poderão evidenciar dificuldades na visualização do gráfico ou na relação entre o sinal da derivada e sentido de variação de uma função. No caso de |

| | |
|---|---|
| | os alunos mostrarem dificuldades na leitura do gráfico a professora deverá questioná-los acerca do significado de uma função ser positiva, negativa ou nula. A professora, caso as dúvidas persistam poderá mostrar alguns exemplos, de funções positivas e negativas e questionar os alunos para o sinal das mesmas. Se os alunos mostrarem dificuldades na relação que se estabelece entre a função derivada e função original, a professora deverá relembrar-lhes o que tem sido feito nas últimas aulas, encaminhando-os para a página 83 do manual escolar. Na questão 3.(b) os alunos poderão ter dificuldades na determinação dos extremos da função no intervalo $]2,5[$. Neste caso a professora deverá questionar os alunos acerca do sinal da função derivada e como este está relacionado com o sentido de variação da função, ou seja, a função é crescente antes do 2 e depois fica constante, terá um máximo para $x = 2$.<br><br>Se durante a resolução destas questões a professora se aperceber de dúvidas ou dificuldades generalizadas deverá interromper a aula e fazer uma explicação para toda a turma. |
| (3) | Apresentação e discussão das questões 1. e 3. da ficha de trabalho nº 3<br>Neste momento alguns alunos irão ao quadro apresentar as suas resoluções das questões 1. e 3. da ficha de trabalho. Os alunos que apresentarem as suas resoluções deverão explicar aos colegas o seu raciocínio e apresentar todas as justificações necessárias. Se existirem resoluções distintas que mereçam ser discutidas, a professora deverá nessas questões pedir a diferentes alunos que mostrem as suas resoluções.<br>Como algumas das questões apresentam algumas particularidades que merecem algum cuidado, a professora deverá, após a apresentação das suas resoluções fazer uma explicação para toda a turma. Na questão 1. a professora deverá reforçar o facto de ser possível determinar uma expressão algébrica de uma função polinomial, a partir da expressão algébrica da sua função derivada. Em funções que não sejam polinomiais, também poderá ser possível determinar a expressão algébrica da mesma a partir da sua derivada, mas terão que ter os devidos cuidados em possíveis pontos em que as funções possam não estar definidas. Na questão 3. a professora deverá, mais uma vez, relembrar aos alunos que a relação entre a função derivada e a função original pode ser estudada graficamente e que as conclusões que se podem retirar desse estudo são igualmente válidas, desde que bem justificadas.<br><br>Após cada questão corrigida e discutida a professora deverá questionar aos alunos se estes têm dúvidas e em caso afirmativo, fazer uma explicação para toda a turma. |
| (4) | Resolução das questões 1. e 3. da ficha de trabalho nº 4, apresentação e discussão dos resultados<br>Durante o trabalho autónomo dos alunos, a professora circulará pela sala de modo a apoiar, através do questionamento, os alunos com eventuais dificuldades.<br><br>Na questão 1. poderão surgir dificuldades inicialmente na compreensão do enunciado e consequentemente na definição do domínio da função, pois embora o período de abertura da bilheteria seja entre as 8h e as 18h, isto significará que a função terá de domínio o intervalo $[0,10]$. Neste caso a professora deverá questionar os alunos acerca no que diz enunciado, nomeadamente na definição da variável $t$. Na alínea (a), os alunos poderão, mais uma vez demonstrar dificuldades no contexto do problema, pois poderão não identificar que a resposta a esta questão passa por calcular $N(0)$. Neste caso a professora deverá questionar os alunos sobre o que significa a abertura da bilheteria tendo em conta definição dada à variável do problema. Na alínea (b), se ainda restarem dúvidas relativamente ao contexto do problema, a professora deverá questionar, mais uma vez os alunos acerca do significado da bilheteria encerrar e o que isso corresponderá à variável do problema. Na alínea (c), que se trata de um problema de otimização, será expectável que os alunos, mais uma vez, se ainda não tiverem compreendido o |

contexto do problema, demonstrem algumas dificuldades em iniciar a resolução desta questão. Neste caso a professora deverá encaminhar os alunos para uma nova leitura do enunciado e questionar-lhes acerca do significado da função que lhes é apresentada, e posteriormente como o podem relacionar com o que é pedido nesta alínea. Como esta alínea poderá ter várias estratégias de resolução, nomeadamente, recorrendo à calculadora gráfica e ao estudo do sinal da função derivada, em cada caso a professora deverá apoiar os alunos de formas distintas. No primeiro caso, a professora deverá relembrar aos alunos a importância de escreverem todos os passos utilizados na calculadora gráfica para que seja compreensível o seu raciocínio. Relativamente a dificuldades que poderão surgir neste método de resolução, serão mais uma vez, no contexto do problema, nomeadamente com o domínio da função. A professora, caso surjam estas dificuldades, deverá questionar os alunos sobre o que representa a variável $t$ e que valores pode esta tomar. No segundo caso, a professora deverá enfatizar que os alunos terão de justificar todos os seus cálculos para que consigam tirar conclusões válidas para responder à questão. Neste método poderão surgir dificuldades na construção do quadro de sinais, nomeadamente no domínio da função original e da função derivada, pois, mais uma vez, os alunos poderão demonstrar dificuldade na compreensão do contexto do problema. Neste caso a professora deverá questioná-los sobre os seus conhecimentos acerca da relação entre o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos de uma função e como esta os poderá ajudar a responder à questão do problema. Além disso, deverá relembrar aos alunos que a função tem um contexto concreto e que eles deverão ter em atenção esse aspeto para a resolução da questão.

Na questão 3. os alunos poderão evidenciar dificuldades no contexto do problema e consequentemente no significado da função. A professora deverá questionar os alunos acerca de que valores a função $h$ toma e o que estes significam no contexto do problema. Além disso, a professora deverá estar atenta à forma como os alunos estão a recorrer à calculadora gráfica para que todos visualizem o mesmo gráfico. Para isso, deverá questionar os alunos acerca da janela de visualização que colocaram e se esta lhes permite resolver o problema.

Depois deste momento de trabalho autónomo, alguns alunos irão ao quadro apresentar as suas resoluções. Os alunos que as apresentarem deverão explicar aos colegas o seu raciocínio e apresentar todas as justificações necessárias. Se existirem resoluções distintas que mereçam ser discutidas, a professora deverá nessas questões pedir a diferentes alunos que mostrem as suas resoluções. Como se trata de um problema de otimização, a professora, após a apresentação e discussão da última alínea, deverá enfatizar que existem diversas estratégias de resolução, mas que em caso de não lhes ser permitido recorrer à calculadora gráfica, um método eficaz para o resolver será estudando o sinal da função derivada, sentido de variação e extremos relativos de uma função. Além disso, a professora deverá reforçar este tipo de problemas têm um determinado contexto e que portanto a resposta ao mesmo deve ser sempre dada contextualizada.

(5) Encerramento da aula

Os alunos serão informados do fim da unidade didática e que iniciarão outra no 3.º Período.

| **Comentário** |
|---|
| Tendo em conta o ritmo de trabalho heterogéneo da turma serão propostos como extra:<br>- Exercício 70 da página 84 do manual escolar<br>- Questão 2. da ficha de trabalho nº 4 |

# Anexo 2

# Tarefas Propostas

NOME: ______________________________________________ TURMA _____

## 2.1. Tarefa: “Estância de Ski”

**Parte I**

A previsão da temperatura numa estância de ski entre as 0 e as 8h de um certo dia é modelada pela expressão

$$f(t) = 0{,}5t^2 - 4t$$

que representa a temperatura em graus centígrados e em que $t$ é o tempo decorrido em horas.

**1.** Representa graficamente esta função recorrendo ao GeoGebra e em seguida:

**(a)** Esboça o gráfico de $f$.

**(b)** Estuda a função quanto à monotonia e existência de extremos e interpreta os resultados obtidos no contexto do problema.

**2. (a)** Calcula $f(6) - f(4)$. Qual o significado do resultado no contexto do problema? E $f(3) - f(1)$?

**(b)** Qual a variação média da temperatura entre as 4 horas e as 6 horas?

Nota: Como a função relaciona a temperatura com o tempo, em **horas**, a variação média da temperatura num intervalo representa o valor que a temperatura variou, em média, em cada hora desse intervalo.

**(c)** Calcula a $t.m.v_{[4,6]}$ e compara o valor obtido com aquele que obtiveste na alínea anterior.

**3. (a)** Calcula a $t.m.v.$ nos seguintes intervalos:

| **Intervalo** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ | $\boldsymbol{t.m.v.}_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}$ |
|---|---|
| $[1,4]$ | |
| $[6,8]$ | |
| $[3,7]$ | |
| $[2,5]$ | |

**(b)** Observa o gráfico e estuda a monotonia nos intervalos:

(i) $[1,4]$

(ii) $[6,8]$

(iii) $[2,5]$

**(c)** Tendo em conta os valores da taxa média de variação para os intervalos i), ii) e iii) que calculaste na 3. (b) podes conjeturar alguma relação entre a monotonia da função e a taxa média de variação num determinado intervalo? Se sim, qual? Explica o teu raciocínio.

**Parte II**

**1. (a)** Representa os pontos $A(1, f(1))$; $B(4, f(4))$; $C(6, f(6))$; $D(8, f(8))$; $E(3, f(3))$; $F(7, f(7))$; $G(2, f(2))$ e $H(5, f(5))$.

**(b)** Cria as retas $AB$, $CD$, $EF$, $GH$ e preenche a tabela por observação da equação reduzida da reta.

| **Reta** | **Equação reduzida da reta** | **Declive da reta** |
|---|---|---|
| $AB$ | | |
| $CD$ | | |
| $EF$ | | |
| $GH$ | | |

**(c)** Preenche a seguinte tabela recorrendo aos valores encontrados nas tabelas 2 e 3 das questões 3.(a) Parte I e 1.(b) Parte II, respetivamente. Compara os resultados obtidos. O que podes conjeturar acerca da relação entre a taxa média de variação de um intervalo $[a, b]$ e o declive da reta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$?

| **Intervalo $[a, b]$** | $\boldsymbol{t.m.v._{[a,b]}}$ | **Declive da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$** |
|---|---|---|
| $[1,4]$ | | |
| $[6,8]$ | | |
| $[3,7]$ | | |
| $[2,5]$ | | |

NOME: ______________________________________________ TURMA ______

## 2.2. Tarefa: "Continuando na Estância de Ski"

**Parte I**

Recorda a função analisada na tarefa anterior em que a previsão da temperatura numa estância de ski entre as 0 e as 8h de um certo dia é modelada por:

$$f(t) = 0{,}5t^2 - 4t$$

que representa a temperatura em graus centígrados e em que $t$ representa o tempo decorrido em horas.

**1. (a)** Preenche a tabela calculando a taxa média de variação da função $f$ em cada um dos intervalos de números reais.

| $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ | $\boldsymbol{t.m.v.}_{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}$ |
|---|---|
| $[5,6]$ | |
| $[5,5.5]$ | |
| $[5,5.125]$ | |
| $[5,5.01]$ | |

**(b)** Como podes observar a amplitude dos intervalos da tabela anterior é cada vez menor. Seguindo esse raciocínio e utilizando o seletor do GeoGebra escolhe três valores de $h$ e preenche a tabela seguinte.

| $\boldsymbol{h}$ | $[\boldsymbol{5}, \boldsymbol{5} + \boldsymbol{h}]$ | $\boldsymbol{t.m.v.}_{[\boldsymbol{5},\boldsymbol{5}+\boldsymbol{h}]}$ |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| | | |

**(c)** Tendo em conta os resultados obtidos nas tabelas anteriores, o que podes conjeturar acerca da taxa média de variação da função à medida que a amplitude do intervalo $[5{,}5 + h]$ diminui?

**Parte II**

**1. (a)** Representa no GeoGebra os pontos $A(5, f(5))$, $B(6, f(6))$, $C(5.5, f(5.5))$, $D(5.125, f(5.125))$, $E(5.01, f(5.01))$ e $F(5+h, f(5+h))$.

**(b)** Constrói as retas $AB$, $AC$, $AD$ e $AE$, no GeoGebra.

(i) Preenche a tabela por observação da equação reduzida das retas.

| **Retas** | **Equação reduzida** | **Declive** |
|---|---|---|
| $AB$ | | |
| $AC$ | | |
| $AD$ | | |
| $AE$ | | |

(ii) Como está a variar o declive das sucessivas retas? Relaciona essa variação com os resultados obtidos na questão 1.(c) da Parte I.

(iii) Constrói agora a reta $AF$ e, fazendo diminuir o valor de $h$, analisa a variação do declive das sucessivas retas que se vão formando. O que observas?

**(c)** Representa graficamente, no GeoGebra, a reta $r$ que contém o ponto $A$ e cujo declive é a taxa de variação no instante $t = 5$.

(i) Qual a posição da reta $r$ relativamente ao gráfico de $f$?

(ii) Qual a relação entre declive da reta $r$ e o declive das retas que consideraste nas alíneas anteriores?

(iii) Tendo em conta a resposta dada às questões anteriores, como podes interpretar, do ponto de vista geométrico, a taxa de variação da função $f$ no ponto $t = 5$? E num ponto qualquer do seu domínio?

NOME: ____________________________________________ TURMA ______

## 2.3. Tarefa: "Derivando ponto a ponto"

Considera a função $f(x) = x^2$ e representa-a graficamente recorrendo à calculadora gráfica.

**1. (a)** Seleciona um ponto do gráfico desta função e regista a sua abcissa. Para isso, clica na tecla TRACE e coloca o cursor sobre um ponto do gráfico de $f$ e de seguida clica em ENTER.

**(b)** Constrói a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto selecionado. Para isso, tecla 2nd DRAW e seleciona 5: Tangent( e ENTER. Verás surgir no ecrã a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto que fixaste anteriormente. Regista o declive da reta tangente.

**(c)** Procede de modo análogo para vários pontos do gráfico de $f$ e preenche a seguinte tabela.

| $x$ | **Declive da reta tangente** |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**(d)** A partir dos valores que registaste na tabela anterior, encontra uma expressão analítica que relacione o valor do declive da reta tangente ao gráfico de $f$ num ponto com a abcissa $x$ desse ponto.

NOME: ______________________________________________ TURMA ______

## 2.4. Ficha de Trabalho nº 1

**Justifica todas tuas respostas, mesmo as de escolha múltipla.**

**1.** A reta de equação $y = 1$ é tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa 3. Qual o valor de:

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

(A) $0$ (B) $1$ (C) $2$ (D) $3$

**2.** Aplicando regras de derivação, determina $f'(x)$, sendo:

2.1. $f(x) = 3x^2 - 8$

2.2. $f(x) = -4x^2 - 5x + 12$

2.3. $f(x) = \frac{x^2}{2} - 7x$

2.4. $f(x) = \frac{6}{x}$

2.5. $f(x) = x^2 - \frac{5}{x}$

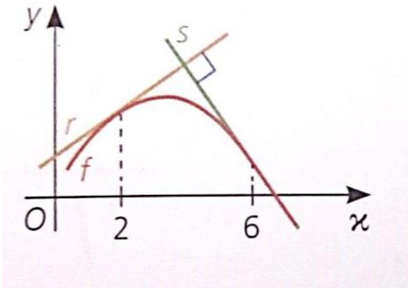
**3.** Considera a função $f$ definida por $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$

3.1. Determina $f'(x)$.

3.2. Escreve uma equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $1$.

**4.** Na figura estão representados:

- O gráfico de uma função $f$
- A reta $r$, tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa 2 e de equação $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{4}$
- A reta $s$ tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $6$.




Sabendo que as retas $r$ e $s$ são perpendiculares, indica o valor de $f'(6)$.

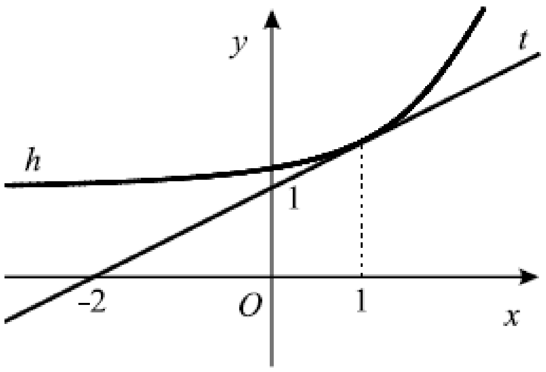
(A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{4}{5}$ (C) $-\frac{2}{5}$ (D) $\frac{5}{3}$

*Exame Nacional do 12.º ano*

**5.** Determina o valor do declive da reta tangente ao gráfico da função $g(x) = -2x^2 + 1$, no ponto de ordenada $-1$ e abcissa negativa. Apresenta os cálculos efetuados.

**6.** Na figura estão representadas:

- parte do gráfico de uma função $h$
- uma reta $t$, tangente ao gráfico de $h$ no ponto de abcissa $1$




Tal como sugere a figura, a reta $t$ intersecta o eixo $Ox$ no ponto de abcissa $-2$ e o eixo $Oy$ no ponto de ordenada $1$.
Indica o valor de $h'(1)$, derivada da função $h$ no ponto $1$.

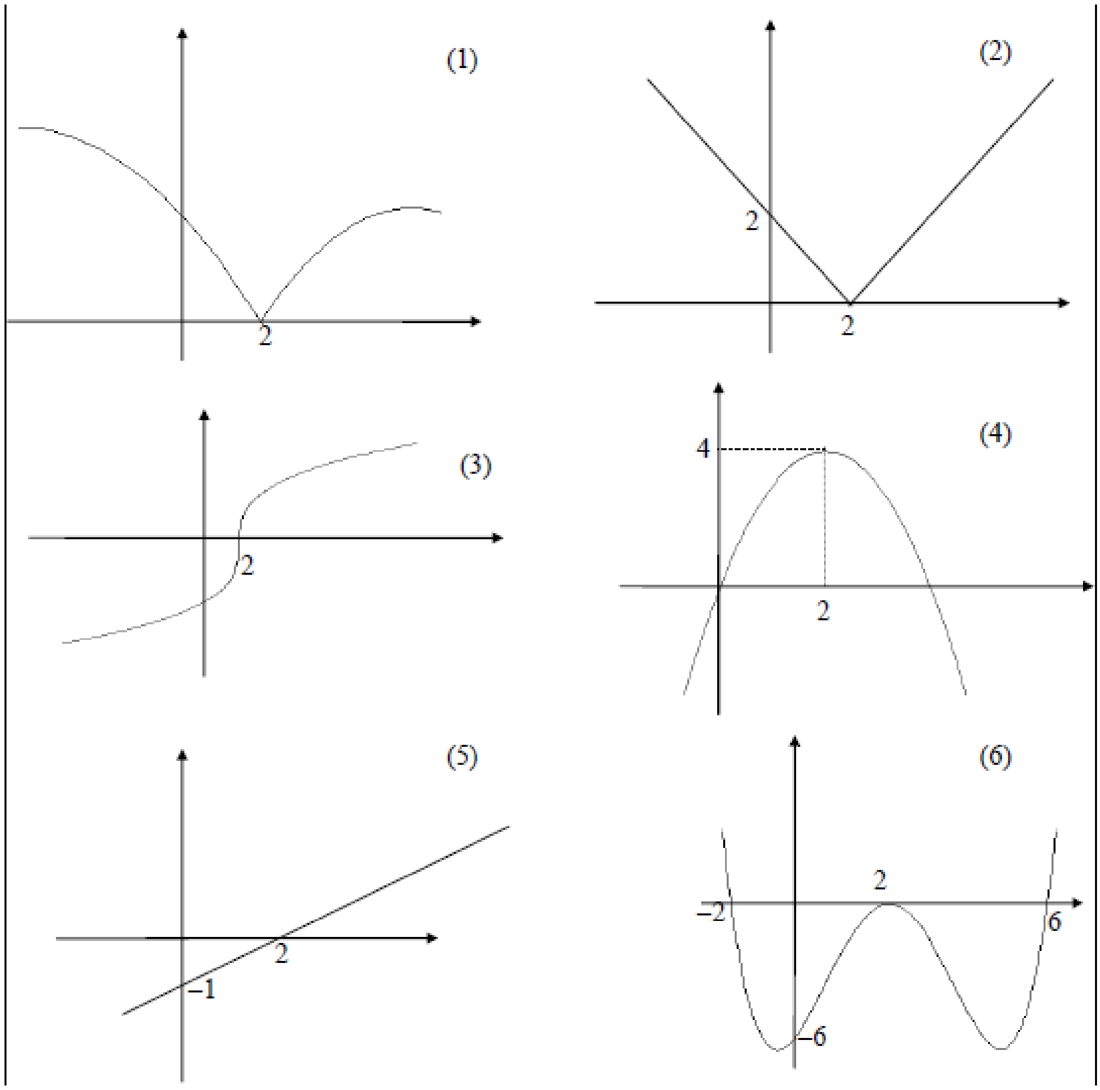
(A) $-2$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $2$

*Teste Intermédio 11.º ano*

**7.** A reta de equação $y = x$ é tangente ao gráfico de uma função $f$, no ponto de abcissa $0$. Qual das expressões seguintes pode definir $f$?

(A) $x^2 + x$ (B) $x^2 + 2x$ (C) $x^2 + 2x + 1$
(D) $x^2 + x + 1$

**8.** Observa as representações gráficas das seguintes funções.




8.1. Em cada caso, indica se a função é ou não diferenciável no ponto de abcissa 2. Nota: <u>Uma função é **diferenciável** num ponto se tiver derivada finita nesse ponto, ou seja, se existir uma reta tangente ao gráfico da função nesse ponto e essa reta não for vertical.</u>

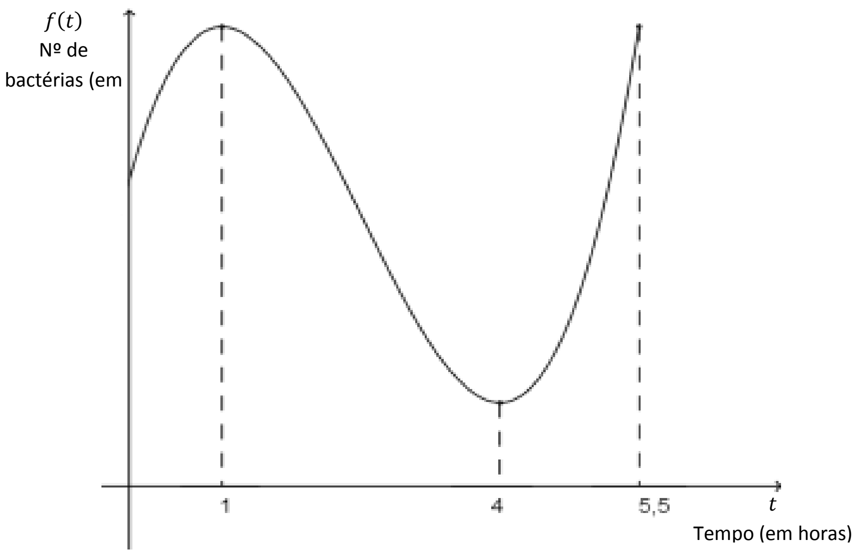
8.2. Para as funções que forem diferenciáveis indica o valor da derivada no ponto de abcissa 2.

*Adaptado de Brochura 11.º ano de Funções, Ministério da Educação*

NOME: ______________________________________________ TURMA _____

## 2.5. Tarefa: “Evolução das bactérias”

Num laboratório realizou-se uma experiência que consistiu na observação do comportamento da reprodução de uma espécie de bactérias. O gráfico seguinte apresenta a evolução do número de bactérias ao longo de 5 horas e 30 minutos.




**1.** A partir da observação da representação gráfica, preenche a seguinte tabela.

| Intervalo | Sinal do declive da reta tangente em pontos de abcissas pertencentes ao intervalo | Sinal da Derivada | Sentido de variação da função (monotonia) |
|---|---|---|---|
| $]0,1[$ | | | |
| $]1,4[$ | | | |
| $]4, 5.5[$ | | | |

**2.** Qual o valor da função derivada nos pontos de abcissa $1$ e de abcissa $4$? Justifica.

**3.** Admite agora que a expressão seguinte define a função representada graficamente acima:

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 4t + \frac{11}{3}, t \in [0, 5.5]$$

**3.1.** Determina $f'(t)$.

**3.2.** Estuda analiticamente o sinal de $f'(t)$ no intervalo considerado e compara com as respostas que deste nas questões 1 e 2.

**4.** Tendo em conta os resultados obtidos nas questões anteriores, que relação existe entre o sinal da função derivada num intervalo aberto e o sentido de variação da função nesse intervalo? Explica.

**5.** Com base nas conclusões da questão anterior, preenche a seguinte tabela indicando os zeros e sinal de $f$' e os extremos e a monotonia de $f$.

Que conjetura podes fazer acerca da relação entre os zeros da função derivada e os extremos da função original?

| $t$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | | | | |
| $f$ | | | | | |

AGRUPAMENTO DE

ESCOLAS

DE CANEÇAS

**MATEMÁTICA A**

11.º ano

Março 2015

NOME: ______________________________________________ TURMA ______

## 2.6. Ficha de Trabalho nº 2

1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, a partir do estudo do sinal da derivada, indica os intervalos de monotonia das seguintes funções e, caso existam, os extremos relativos das funções definidas pelas expressões:

(a) $f(x) = x^3 - x$

(b) $(x) = -x + \frac{1}{x}$

(c) $h(x) = |x + 1|$

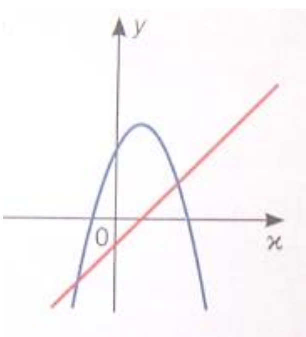
2. A Filipa pretende colocar no jardim da sua casa uma piscina retangular com 64 $m^2$ de área.

(a) Prova que o perímetro da piscina é dado pela expressão $P(x) = 2x + \frac{128}{x}$, onde $x$ representa o comprimento da piscina, em metros.

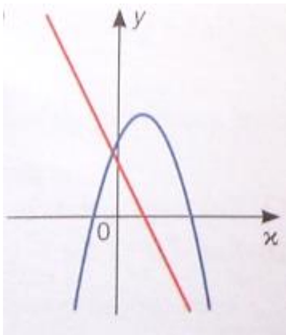
(b) Determina as dimensões da piscina para que o seu perímetro seja mínimo.

3. Em qual das seguintes figuras estão representados os gráficos de uma função e o da respetiva derivada? Justifica a tua resposta.

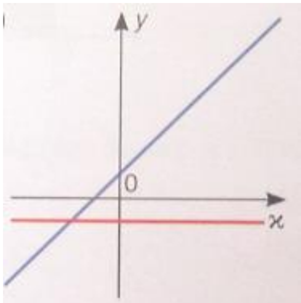
(A)



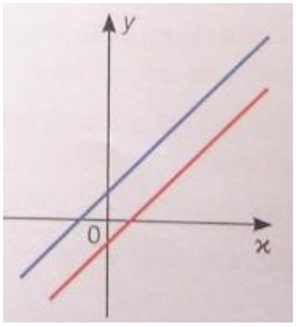

(B)




(C)




(D)

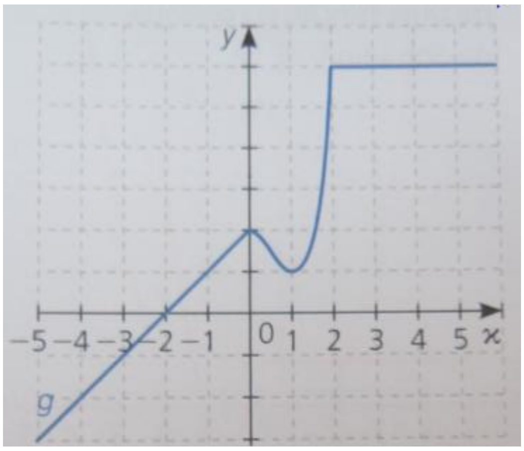


4. Médicos investigadores estudaram, durante 30 dias, a evolução de uma doença contagiosa, numa dada cidade. A percentagem da população infetada é dada por:

$p(t) = 0{,}3t^2 - 0{,}01t^3$, onde $t$ representa o número de dias.

Em que dia do período estudado é máxima a percentagem de população infetada?

5. Na figura está representada, em referencial o.n., parte do gráfico de uma função $g$.




(a) Indica um intervalo em que a derivada de $g$ seja nula.

(b) Indica pontos em que a função tenha um extremo relativo e diz, justificando, se existe, ou não, derivada nesse ponto.

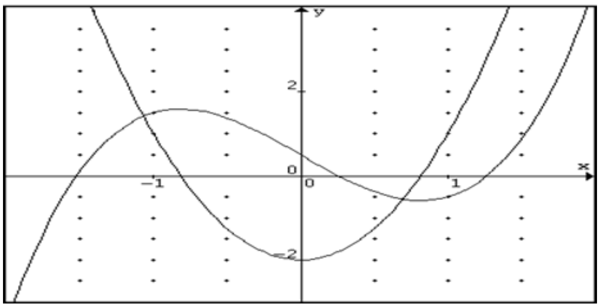
(c) Constrói um quadro de sinais da derivada de $g$ no intervalo $[-5{,}5]$.

NOME: ____________________________________________ TURMA _____

## 2.7. Ficha de Trabalho nº 3

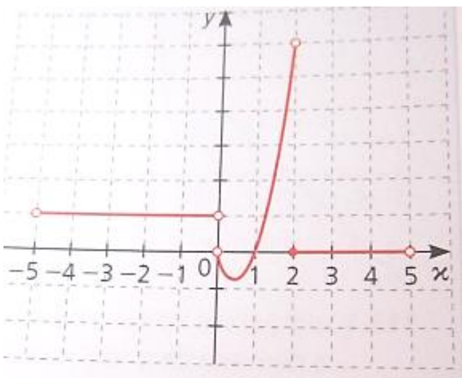
**1.** A derivada de uma certa função quadrática é dada por: $f'(x) = 326x + 2$. Determina a função quadrática em causa, sabendo que esta passa pelo ponto (1,190).

**2.** Observa o gráfico onde estão representadas uma função $f$ e a sua derivada $f'$. Indica, justificando, qual dos gráficos corresponde à função $f$ e à função $f'$.




Adaptado de: Brochura de Funções, 11.º ano, ME

**3.** Na figura seguinte está representada, em referencial o.n., o gráfico da derivada de uma função $g$ contínua de domínio $]-5,5[$.




**(a)** Indique intervalos onde $g$ é crescente, onde $g$ é descrescente e onde $g$ é constante.

**(b)** Indique os pontos em que a função $g$ admite extremos relativos, indicando se são máximos ou mínimos.

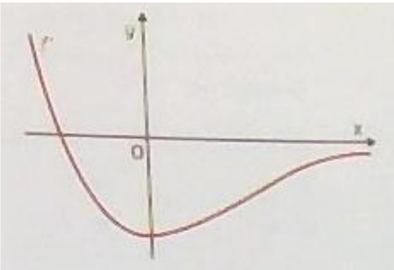
**4.** O quadro seguinte traduz a variação da função polinomial $f$, de domínio $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variação e extremos de $f$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $3$ | ↘ |

Propõe um quadro que traduza uma possível variação de sinal de $f'$ e esboça um gráfico para a função $f$, adequado à situação.

**5.** Seja $g$ a função definida por $g(x) = |4 - x^2|$. Com o recurso à calculadora gráfica esboça o gráfico da função $g$ e indica o domínio da função $g'$.

**6.** Seja $f$ uma função de domínio $\mathbb{R}$ e que admite derivada em todos os pontos do seu domínio. Na figura encontra-se parte do gráfico de $f'$, função derivada de $f$. Sabe-se ainda que $f(0) = 2$. Qual pode ser o valor de $f(3)$?




(A)1 (B) 2 (C) 5 (D) 7

**AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CANEÇAS**

**MATEMÁTICA A**

11.º ano

Março 2015

NOME: ____________________________________________ TURMA ______

## 2.8. Ficha de Trabalho nº 4

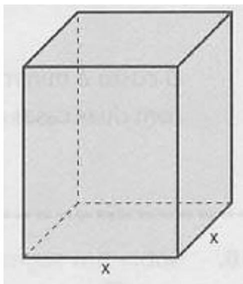
1. Num determinado dia, junto às bilheteiras de um estádio de futebol, o número de pessoas na fila para tentar comprar bilhetes para um jogo decisivo da Liga dos Campeões, desde as 8h (abertura da bilheteira) até as 18h (encerramento da bilheteira) é dado pelo seguinte modelo matemático:

$N(t) = 20t^3 - 150t^2 + 240t + 323$, $t$ em horas.

(a) Indica o número de pessoas que estavam na fila à hora que abriu a bilheteira.

(b) Quantas pessoas estavam ainda na fila quando a bilheteira encerrou?

(c) Determina o número mínimo de pessoas que estiveram na fila ao longo deste período. A que horas isso ocorreu?




2. Pretende-se construir uma caixa fechada com a forma de um prisma reto, de base quadrada, e com $300\ dm^3$ de capacidade.

O custo de fabrico da tampa e da base é de 30 cêntimos por $dm^2$ e o das faces laterais de 10 cêntimos por $dm^2$.

Mostra que o custo da caixa, em euros, é dado, em função de $x$, por $C(x) = 0{,}6x^2 + \frac{120}{x}$ e determina as dimensões da caixa de modo que o seu custo de fabrico seja mínimo. Apresenta os resultados aproximados às centésimas.

3. A figura representa uma ponte antiga em Lavertezzo, na Suíça. O seu arco tem uma altura (em metros) que é dada aproximadamente por uma parábola de equação $h(x) = -1{,}25x^2 - 37x + 123$, num certo sistema de eixos coordenados.

Determina, recorrendo à calculadora gráfica, as coordenadas do ponto mais alto do arco (aproximadas às décimas).

Nota: Deves justificar todos os passos, e apresentar o gráfico que visualizaste na calculadora bem como todos os comandos que utilizaste.

4.Considera a função real de variável real f, definida por $f(x) = \frac{x}{40} + 50 + \frac{10}{x}$

(a) Qual é o domínio da função $f$?

(b) Indica, justificando, a assíntota vertical da função $f$.

(c) Uma empresa fabrica um certo tipo de objetos e vende-os em lotes de x unidades, sendo $10 \leq x \leq 50$. O custo da produção, em centenas de euros, é dado pela função $C$, restrição da função f ao intervalo $[10{,}50]$. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos determina o valor mínimo desse custo.

5. Uma vidraça retangular com 10$m^2$ de área é guarnecida por um friso em que o metro linear do material que é utilizado na horizontal custa 2€ e do material que é aplicado na vertical custa 5€. Determina as dimensões da vidraça de modo que o custo do friso seja mínimo e indica o respetivo custo.

6. Uma viagem de estudo organizada pela escola custará 200€ a cada estudante, se viajarem no máximo 150 estudantes. Contudo, o custo por estudante será reduzido em 0.5€ por cada estudante além dos 150. Quantos estudantes devem viajar para que a escola tenha a receita máxima.

# Anexo 3

# Testes de Avaliação

## 3.1. Teste de Avaliação – 6 de Março (2.º Período)

| AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CANEÇAS | DISCIPLINA DE MATEMÁTICA A<br>11.º ano<br>Março 2015<br>**4.º Teste de Avaliação** |
|---|---|

**GRUPO I**

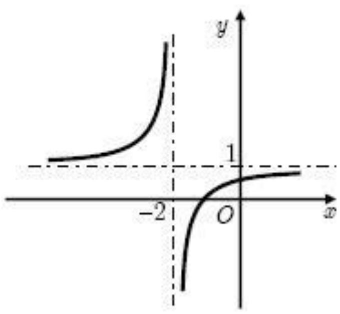
- As **cinco** questões deste grupo são de escolha múltipla
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais uma está correta
- Escreva na folha de repostas apenas a letra correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível
- Não apresentes cálculos nem justificações

**1.** Sobre uma função racional $f$ sabe-se que:

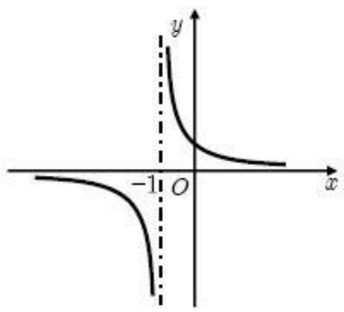
- o seu gráfico admite a assimptota de equação $y = 2$
- $f$ é crescente em $]-\infty,0[$

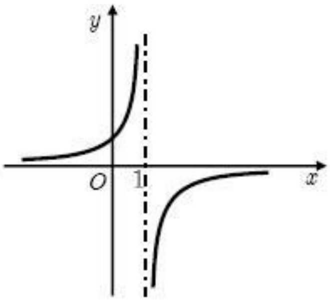
Em qual das figuras seguintes pode estar a representação gráfica da função definida por $g(x) = f(x+1) - 2$?

**(A)**

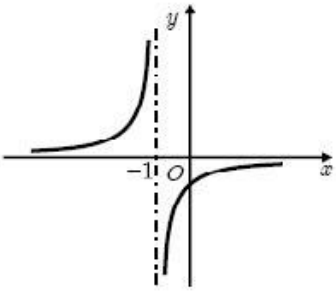



**(B)**

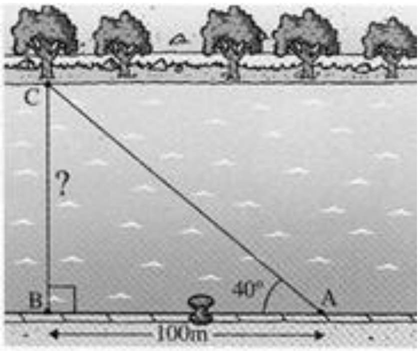


**(C)** 



**(D)** 







**2.** Tendo em conta os dados da figura ao lado, qual é a largura aproximada do rio?

**(A)** 83 m **(B)** 84 m

**(C)** 85 m **(D)** 82 m

**3.** Considere a reta *r* de equação $y=-3x+2$. Quais das seguintes equações representa a reta que contém o ponto (0,-4) e é perpendicular à reta r dada?

(A) $y=-3x+4$ (B) $y=\frac{1}{3}x+4$

(C) $y=\frac{1}{3}x-4$ (D) $y=-\frac{1}{3}x-4$

**4.** Num referencial o.n. do plano, a reta de equação $y=-3x$ é tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $-1$. Indica o valor de

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

**(A)** 0 **(B)** $-3$ **(C)** $-1$ **(D)** $1$

**5.** Se $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|=1$ e $\vec{a}\perp\vec{b}$, então $(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$ é igual a:

**(A)** -1 **(B)** 2 **(C)** -3 **(D)** 0

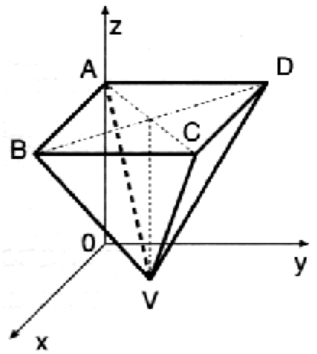
GRUPO II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

**1.** Mostra que, para qualquer $\alpha \in \Re$, $\dfrac{(senx + cos\,x)^2 - 1}{senx} = 2cos\,x$

**2.** Considere, num referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide regular de base quadrada (ver figura ao lado).
O vértice V da pirâmide pertence ao plano xOy. A base da pirâmide pertence ao semieixo positivo Oz. A aresta [BC] é paralela ao eixo Oy. O ponto V tem coordenadas (3,3,0).




**2.1.** Sabendo que, na unidade considerada, o volume da pirâmide é igual a 72, mostre que o ponto A tem coordenadas (0,0,6).

**2.2.** Mostre que o plano VBC pode ser definido pela equação $2x - z - 6 = 0$.

**2.3.** Determine uma condição que defina a reta que passa na origem do referencial e é perpendicular ao plano VBC.

**2.4.** Justifique que a intersecção da aresta [VC] com o plano de equação $z = 2$ é o ponto M(4,4,2).

**3.** Considera as funções reais $f$ e $g$, definidas por $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ e $g(x) = \dfrac{x+6}{x-3}$

**3.1.** Indica o domínio e o contradomínio de $f$.

**3.2.** Mostra, **justificando**, que o gráfico de $g$ tem duas assintotas e indica as suas equações.

**3.3.** Determina, analiticamente, na forma de intervalo, o conjunto dos números reais *x* tais que

$$f(x) \leq g(x).$$

**4.** Considera a função $f(x) = x^2 - 3$

**4.1.** Calcula a taxa média de variação da função $f$ no intervalo $[1,3]$

**4.2.** Calcula a taxa de variação para $x = -1$.

**4.3.** Determina a equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $-1$.

*Bom Trabalho*

**Cotações:**

**Grupo I (50 pontos)**

| **Questão** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Cotação** | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |

**Grupo II (150 pontos)**

| **Questão** | **1** | **2.1** | **2.2** | **2.3** | **2.4** | **3.1.** | **3.2** | **3.3** | **4.1.** | **4.2** | **4.3** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cotação** | 15 | 10 | 20 | 10 | 15 | 10 | 12 | 20 | 10 | 15 | 13 |

## 3.2. Teste de Avaliação – 24 de Abril (3.º Período)

**AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE CANEÇAS**

**DISCIPLINA DE MATEMÁTICA A**

11.º ano

24 Abril 2015

**5.º Teste de Avaliação**

### GRUPO I

- As **cinco** questões deste grupo são de escolha múltipla
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais uma está correta
- Escreva na folha de repostas apenas a letra correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível
- Não apresentes cálculos nem justificações

**--- Questão 1 ---**

Sejam $f$ e $g$ duas funções reais tais que:

- As funções $f$ e $g$ tem domínio IR;
- A função $f$ tem três zeros: -1, 2 e 3;
- 2 é o único zero da função $g$.

Quantos zeros tem a função $\frac{g}{f}$?

**A)** 3 **B)** 2 **C)** 0 **D)** 1

**--- Questão 2 ---**

Considera as funções $f$ e $g$, definidas por $f(x)=\frac{3x-9}{x-1}$ e $g(x)=x-4$. Qual das afirmações é <u>falsa</u>?

(A) $(f \circ g)(2)=5$ (B) $(g \circ f)(2)=-7$

(C) $D_{f\circ g}=\Re \setminus \{5\}$ (D) $D_{g\circ f}=\Re \setminus \{5\}$

**--- Questão 3 ---**

Seja $f$ a função trigonométrica definida por $f(x) = a \times \cos(x + b)$, sendo $a$ e $b$ números reais positivos.

Qual dos seguintes intervalos de números reais corresponde ao contradomínio da função $f$?

**A)** $[-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$ **B)** $[-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}]$ **C)** $[-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}]$ **D)** $[-\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}]$

**--- Questão 4 ---**

Seja $f$ uma função de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que a sua derivada $f'$ é tal que $f'(x) = x - 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Relativamente à função $f$ qual das afirmações é verdadeira?

(A) $f$ é crescente em $\mathbb{R}$.

(B) $f$ é decrescente em $\mathbb{R}$.

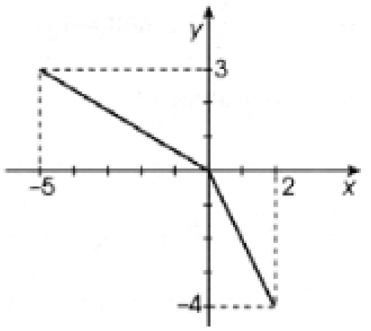
(C) $f$ tem um mínimo para $x = 2$.

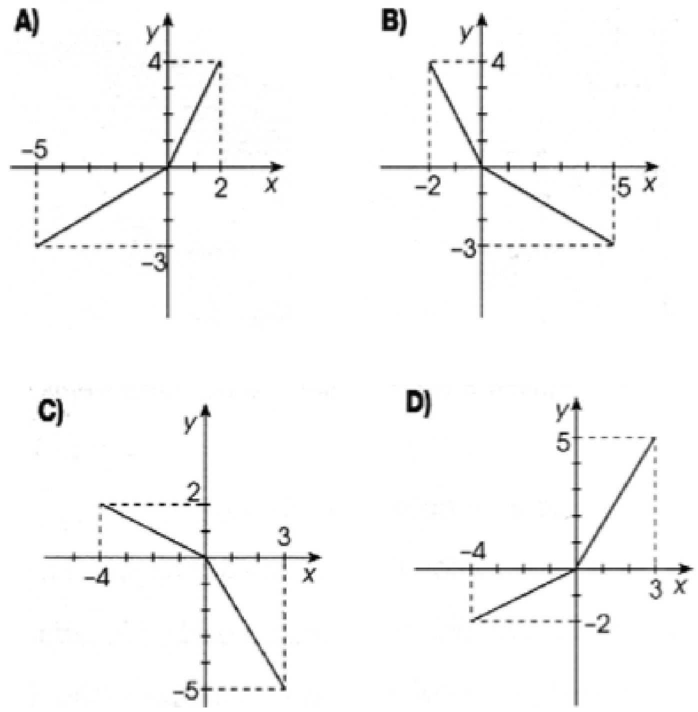
(D) $f$ tem um máximo para $x = 2$.

**--- Questão 5 ---**

A figura ao lado é a representação gráfica de uma função $g$.

Então, o gráfico de $g^{-1}$ será:






GRUPO II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

**--- Questão 1 ---**

Seja $g$ a função real de variável real, definida por $g(x) = \sin^2 x$.

1.1. Determina o conjunto-solução da equação $g(x) = \sin x$, no intervalo $[0,2\pi]$.

1.2. Determina a $t.m.v._{\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]}$.

**--- Questão 2 ---**

Considere as funções $f$ e $g$, reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = \frac{2x+4}{x-3} \qquad g(x) = x^2 - 5x + 9$$

2.1. Mostre que $f^{-1}$, função inversa de $f$, pode ser definida no seu domínio pela expressão $\frac{4+3x}{x-2}$, e caracteriza-a.

2.2. Calcule $\left(f^{-1} \circ g\right)(2)$.

2.3. Indica o domínio da função $f \circ g$.

2.4. Resolve a inequação $f(x) < g(0)$.

**--- Questão 3 ---**

Dada a função $g$ tal que $g(x) = x^3 - 12x$.

3.1. Calcula $g'(x)$

3.2. Mostra que $g'(1) = -9$.

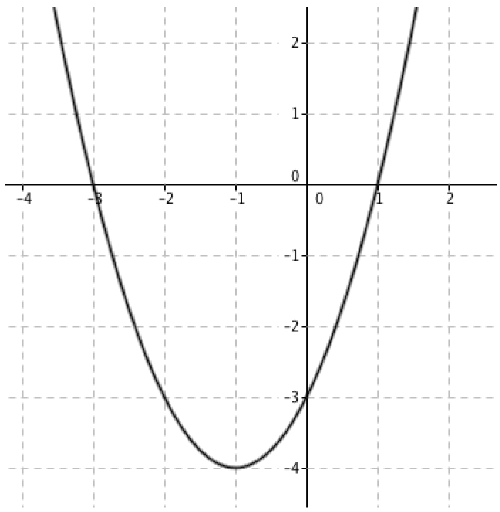
3.3. Escreve a equação da reta tangente ao gráfico de $g$ no ponto de abcissa 1.

3.4. Determina os zeros de $g'(x)$ e o conjunto dos pontos em que $g'(x) > 0$

3.5. Indica os intervalos de monotonia de $g$

**--- Questão 4 ---**

Na figura ao lado está representada, num referencial $xOy$, parte do gráfico de uma função quadrática $f$.




Seja $g$ a função de domínio IR, definida por $g(x) = 2x + 4$.

4.1. Tendo em conta o gráfico de $f$ e a expressão analítica de $g$, determina o conjunto solução da inequação $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, construindo uma tabela de sinais.

4.2. Sendo $h$ a função definida por $h(x) = 2x^2 - 6x - 20$. Caracteriza a função $\frac{g}{h}$.

**--- Questão 5 ---**

Uma mulher foi assassinada. A Polícia Judiciária sabe que a temperatura do corpo da mulher , ***t*** horas depois da morte, é dada, em graus Célsius, pela função definida por:

$$f(t) = \frac{20t + 185}{t + 5}$$

5.1) Qual era a temperatura da mulher no momento em que foi assassinada?

5.2) Qual a temperatura da mulher uma hora após a sua morte? Apresenta o resultado arredondado às décimas.

5.3) Determina a equação da assíntota horizontal do gráfico da função e interpreta o seu significado no contexto do problema.

**Bom Trabalho!**

# Anexo 4

# Autorizações

## 4.1. Pedido de Autorização – Direção

Exmo. Sr.

Diretor do Agrupamento

de Escolas de Caneças

Eu, Inês Vasques, mestranda em ensino da matemática e estagiária sob a orientação da professora de Matemática Anabela Candeias do 11.º, venho solicitar autorização para concretizar, nesta escola, o projeto de investigação em educação no âmbito da unidade didática "Taxa de Variação, Taxa Média de Variação e Derivada". Este projeto visa compreender de que forma os alunos se apropriam do conceito de derivada e das suas principais aplicações, bem como reconhecer as principais dificuldades sentidas neste tema. O trabalho de cariz investigativo em questão integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Ensino da Matemática, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

A concretização deste projeto implicará a recolha de dados de alunos do 11º ano, referentes à disciplina de Matemática. O trabalho empírico terá por base o desempenho dos alunos do 11.º , ao longo do 2º Período nas diversas tarefas propostas. Serão objeto de análise, nesta investigação: i) materiais produzidos dentro e fora da sala de aula pelos alunos, como, por exemplo, fichas de trabalho e relatórios; ii) transcrições de algumas das interações geradas entre eles; e iii) transcrições de entrevistas que lhes sejam realizadas, fora da sala de aula. A recolha de dados envolverá a gravação em áudio e/ou vídeo de alguns destes momentos. Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes e à própria escola, enquanto instituição. Os encarregados de educação serão informados sobre este estudo, sendo essencial o seu consentimento, para possibilitar a participação dos alunos que nele pretendam vir a colaborar.

5 de janeiro de 2015

Pede deferimento,

______________________________

(Inês Vasques)

## 4.2. Pedido de Autorização – Encarregados de Educação

Exmo. Sr.

Encarregado de Educação

Eu, Inês Vasques, mestranda em ensino da matemática e estagiária sob a orientação da professora de Matemática Anabela Candeias do 11.º , venho comunicar que a turma irá participar, durante doze aulas de 90 minutos no 2.º Período, no Plano de trabalho de cariz investigativo no âmbito da unidade didática "Taxa de Variação, Taxa Média de Variação e Derivada". Este projeto visa compreender de que forma os alunos se apropriam do conceito de derivada e das suas principais aplicações, bem como reconhecer as principais dificuldades sentidas neste tema. O trabalho de cariz investigativo em questão integra-se no âmbito da disciplina de Iniciação à Prática Pedagógica do curso de Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade de Lisboa.

Deste Plano de trabalho não resultará qualquer prejuízo para os alunos, podendo com grande probabilidade resultar benefícios para a sua compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos, nomeadamente no campo da Álgebra. No entanto, o interesse dos alunos em participar voluntariamente neste estudo e o consentimento dos respetivos encarregados de educação (preenchendo e assinando a ficha anexa), são duas condições essenciais para que se efetive a sua participação neste projeto.

O trabalho empírico terá por base o desempenho dos alunos do 11.º, devidamente autorizados, sendo objeto de análise, neste projeto: i) materiais produzidos dentro e fora da sala de aula pelos alunos, como, por exemplo, fichas de trabalho e relatórios; ii) transcrições de algumas das interações geradas entre eles; e iii) transcrições de questionários e entrevistas que lhes sejam realizadas, fora da sala de aula. A realização de questionários e entrevistas poderá decorrer, ocasionalmente, em tempos relativos às áreas curriculares não disciplinares ou em outro horário previamente acordado com os alunos e respetivos encarregados de educação. Os dados recolhidos serão usados exclusivamente para o objetivo deste projeto, não sendo divulgados por nenhum meio os nomes dos alunos participantes, nem a identificação da escola, salvaguardando-se assim o seu anonimato.

Os alunos participantes e os respetivos encarregados de educação serão informados, ao longo do 2.º Período ou sempre que considerem necessitar de algum esclarecimento adicional, sobre o modo como estão a decorrer as atividades.

Antecipadamente grata pela colaboração de todos os intervenientes neste processo.

8 de janeiro de 2015

A Mestranda em Ensino da Matemática,

___________________________________

(Inês Vasques)

**Autorização**

Eu, encarregado de Educação do(a) aluno(a) _____________________________, n.º ____, da turma do 11ºano de escolaridade, tomei conhecimento dos objetivos do Plano de trabalho de cariz investigativo no âmbito da unidade didática "Taxa de Variação, Taxa Média de Variação e Derivada" que envolverá a turma, no âmbito da disciplina de Matemática, ao longo do 2.º Período, e ___________________________ (autorizo/ não autorizo) a participação do meu educando.

Relativamente a realização de entrevistas e questionários, ou a outras atividades no âmbito deste projeto de trabalho, _________________________ (autorizo/não autorizo) que envolvam o meu educando, salvaguardando o seu anonimato.

Caneças, _____ de ___________________ de 2015

O(A) Encarregado(a) de Educação

________________________________________